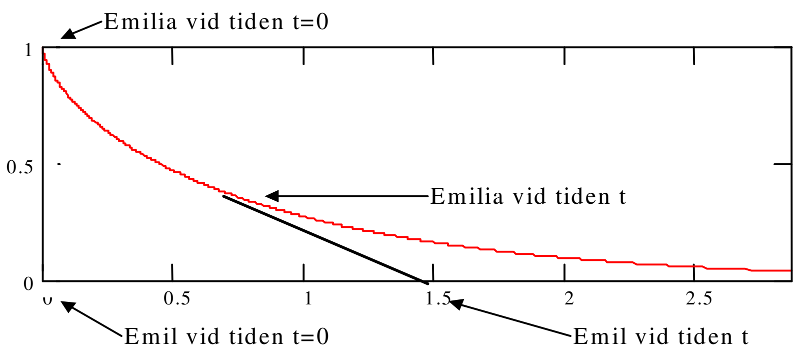
Extrauppgifter till matematiska metoder E1 del B, 1998

1. Visa att om två av hörnpunkterna i en kvadrat i planet har rationella koordinater så har även de övriga två hörnpunkterna rationella koordinater.

2. Bestäm alla komplexa tal z för vilka $(\mathrm{Re}\, z)^4 = \mathrm{Re}(z^4)$.
   Ge två lösningar: i) med $z = a + ib$ ii) med $z = re^{i\varphi}$.
   Vilken lösning tyckte Du bäst om ?

Svar: Linjerna $y = 0$, $y = \sqrt{6}x$ och $y = -\sqrt{6}x$ i komplexa talplanet ($z = x + jy$)

1) Emil och Emilia är i en simhall. Emilia sitter på en luftmadrass som Emil drar med ett rep. Repet är alltid sträckt. Avståndet mellan Emil och Emilia är alltid $1m$. Emil startar i bassängens ena hörn och går längs kanten enligt figuren.



Längs vilken bana rör sig Emilia ?

Lösningstips:

Du skall bestämma den kurva C för vilken tangenten i en punkt P (Emilia) skär x-axeln i punkten A (Emil) så att $|PA| = 1$; det ger dig differentialekvationen (DE): $1 = y^2 + \dfrac{y^2}{(y')^2}$;

bestäm $x = x(y)$; $y' < 0$!

Svar: $x(y) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{1-\sqrt{1-y^2}} - \sqrt{1-y^2}$.

Anm: Denna kurva C kallas *släpkurva* (aha !) eller *traktris* (lat: trahere = släpa, dra ...).

2) En gevärskula träffar vinkelrätt en vägg med en hastighet av $200m/s$, genomtränger väggen och lämnar den efter 0.001 sekunder på baksidan med halva hastigheten. I väggen bromsas kulan med en kraft (mv') som är proportionell mot kvadraten på kulans hastighet. Hur tjock är väggen ?

Svar: $\dfrac{\ln 2}{5} m \quad (\approx 14\,cm)$