Matematiska institutionen
CTH/GU

Inlämningsuppgifter, Matematiska metoder E1 (TMA042), del B, ht 98

1. Läs PM angående inlämningsuppgifterna. (Varje uppgift kan ge 1 p som adderas till dina poäng på tentamen del B: 18/12 -98, 8/4 -99 och 27/8 -99, ej senare tentor.)
2. Med dessa inlämningsuppgifter får du chansen att träna att formulera dig, att skriva ner en lösning på ett acceptabelt sätt och få den rättad. Lämna in ordentliga lösningar! Uppgifterna liknar tentamens-uppgifter. Utnyttja denna chans, inte bara för poängens skull.
3. Lämna lösningen personligen till din övningsledare (det är han som rättar din lösning och som skall kunna diskutera den med dig) i respektive vecka:
   Grupp a–d: må kl 13.15, grupp e–g: ti kl 13.15.
   Du får tillbaka den i den efterföljande räknestugan. Byte av övningsgrupp medges ej.
4. Alla inlämnade blad måste ha namn och personnummer. *Blad utan namn eller utan personnummer rättas ej.* Lösningar inlämnade efter angiven tid rättas ej.

Uppgift 1 (lämnas vecka 3)

Bestäm alla lösningar till ekvationerna

a) $jz^6 + (8+2j)z^3 + 16 = 0$,
b) $\sin z = 2$. $\big($Ledning: $\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$.$\big)$

Ge lösningarna på formen $a + jb$, utan trigonometriska funktioner.

Uppgift 2 (lämnas vecka 4)

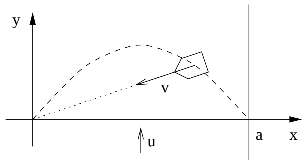
1) Lös differentialekvationen

$$(x + x^2)y' + y = x, \quad x > 0.$$

Ange också den lösning som uppfyller villkoret $y(1) = 1$.

2) Emil skall ro över en ström älv vars bredd är a meter och där vattnets strömningshastighet är u m/s. (Vattenflödet är konstant och parallellt med de två parallella stränderna.) Han ror med den, relativt vattnet, konstanta farten v m/s i riktning mot Emilia som står still på motsatta stranden på den plats som är närmast den där Emil börjar ro. Med koordinater enligt figuren kommer båten att följa en funktionskurva $y = y(x)$, där $y(x)$ är en lösning till differentialekvationen

$$\begin{cases} x\frac{dy}{dx} = y - \frac{u}{v}\sqrt{x^2+y^2}, & 0 < x < a, \\ y(a) = 0. \end{cases}$$



Härled denna ekvation och lös den då $v = 2u$. (Ledning: Tangentvektorn till kurvan ges av båtens hastighet, som är summan av vattenhastigheten och roddhastigheten, där den senare har belopp v och är riktad mot origo.)

Uppgift 3 (lämnas vecka 5)

Lös differentialekvationerna

a) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos^2 x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$,
b) $2y''' - y'' + y' - 6y = xe^{-x}$.

Lösningarna skall ges på reell form.

Uppgift 4 (lämnas vecka 6)

En superenkel kamera fungerar enligt linsformeln,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}\,,$$

där a är avståndet från objektivet till motivet, b avståndet från objektivet till filmen och f brännvidden (fokaldistansen) hos objektivet. Nu vet vi både avståndet a och brännvidden f, men behöver räkna fram inställningen av b, och vi ser strax att

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{a}} \qquad (1) \\ &= \frac{af}{a-f}\,. \qquad (2) \end{aligned}$$

Vi förutsätter att vi har en processor med IEEE standardaritmetik i vår i övrigt anspråkslösa kamera, och skall bestämma oss för vilket av de två uttrycken i ovanstående formel vi skall använda.

Utred följande frågor:

a) Ett av uttrycken kan beräknas med ett begränsat relativfel i b, om man antar att a och f är exakt kända. Vilket? Ge en begränsning för relativfelet som funktion av avrundningsgränsen ϵ_{mach} för det uttrycket!
b) Uttrycket som ratades i föregående deluppgift är i alla fall bakåtstabilt. Ge en begränsning för de ekvivalenta störningarna på a och f!
c) Om vi inte känner a och f exakt, ge en uppskattning av störningen vi får i b, som funktion av störningarna i a och f!
d) När kan osäkerhet i a och f ge upphov till stor relativ störning av b?

Uppgift 5 (lämnas vecka 7)

1) Bestäm konstanten a så att

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 0, \\ \frac{a}{x^3+4x^2+7x+6} & \text{för } x \geq 0, \end{cases}$$

blir en frekvensfunktion. Låt X vara en stokastisk variabel med frekvensfunktionen $f(x)$. Bestäm fördelningsfunktionen för X, samt sannolikheten $P(X > 3)$.

2) En digital kommunikationslänk sänder sekvenser ("ord") av ettor och nollor ("bitar"). På sändarsidan har man uppgivit att en sänd etta mottages felaktigt i 5 fall av 10 000, medan en sänd nolla mottages fel i 1 fall av 10 000. Antag nu att man har mottagit en etta.

a) Hur stor är då sannolikheten att man också sände en etta.

För att lösa denna uppgift behöver du veta sannolikheterna för nolla resp etta på sändarsidan.

Antag därför att man i medel sänder lika många nollor som ettor, dvs att sannolikheten för både nolla och etta är 1/2. (Detta är klart rimligt.) Nu kan du också bestämma sannolikheten att man sände en nolla givet att man mottog en nolla. Denna sannolikhet behöver du för att lösa nästa deluppgift.

Du kanske känner till den s k ASCII-koden, där man med ord om 7 bitar kan koda bokstäver i det engelska alfabetet, de tio siffrorna och en del andra tecken. Antag nu att man mottager ordet k = 1 1 0 1 0 1 1.

b) Hur stor är då sannolikheten att man också sände detta ord?

För att lösa denna uppgift behöver du inte bara veta sannolikheterna för nolla resp etta på sändarsidan, utan du behöver också känna till beroendet mellan konsekutiva avsända bitar. Du ska räkna utifrån det inte helt orealistiska antagandet att vi har oberoende.

Det som nu följer är överkurs. Det räckar alltså att lösa ovanstående 2 deluppgifter för att få godkänt på uppgiften. Varför ska du då öda tid på uppgifterna nedan? Dels är det bra träning inför tentan, dels kan en god insats räknas dig tillgodo om du skulle råka hamna precis under en betygsgräns för kursen, eller precis under gränsen för godkänt på delkursen.

Genom att sända ytterligare 3 bitar, finurligt valda, kan man upptäcka och korrigera ett fel i det sända ordet. Antag nu att man mottog utöver de fem ettorna och två nollorna i ordet k = 1 1 0 1 0 1 1, två ettor och en nolla. Sammantaget mottogs alltså 7 ettor och 3 nollor.

c) Hur stor är sannolikheten att man också sände det som mottogs?

d) Hur stor är sannolikheten att man fick exakt ett fel i överföringen?

Addera nu dessa sannolikher och jämför med resultatet i uppgift 2. Lyckades man minska sannolikheten för fel genom att införa den felkorrigerande koden?