Matematiska institutionen
CTH/GU

Datorlaboration, Matematiska metoder E1 (TMA042), del B, ht 98

1. Laborationen är ej obligatorisk.
2. Laborationen utförs antingen individuellt eller som samarbete av två personer.
3. Laborationen består av fyra uppgifter. Förtjänstfullt utförda lösningar ger bonuspoäng vid tentamen del B, 18/12 -98, 8/4 -99 och 27/8 -99, ej senare tentor. En bonuspoäng erhålles per 10 p på laborationen (BP=INT(P/10)).
4. Lösningarna skall lämnas senast on 9/12 kl 15^{00} efter föreläsningen till Patrik Andersson. Skriv namn och personnummer på varje inlämnat blad (båda vid grupparbete). *Blad utan namn eller utan personnummer rättas ej.* Lösningar inlämnade efter angiven tid rättas ej. Lösningarna lämnas tillbaka med del B-tentan.

Uppgift 1

Betrakta differentialekvationen

$$\text{(DE)}: \quad y' = e^y \sin x.$$

a) Lös ekvationen utan datorn. (2p)
b) Lös ekvationen explicit med datorn. (2p)
c) Rita lösningskurvorna till (DE) genom punkterna $(0, c)$ för $c = -1.9 + k/6$, $k = 0, \ldots, 13$, i området $-7 \le x \le 7$, $-1.8 \le y \le 4$, i samma diagram, ett utan riktningsfält och ett med riktningsfält. (4p)

Uppgift 2

Rita fasporträttet $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ till Lorentzsystemet

$$\begin{cases} x' = 10(y - x), \\ y' = -xz + 28x - y, \\ z' = xy - \frac{8}{3}z, \end{cases} \qquad (x(0), y(0), z(0)) = (0.001, 0, 0),$$

(se avsnitt 9.12 i boken) för $0 \le t \le 22$. (6p)

Uppgift 3

Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' = -y - \frac{1}{3}x^3 + x, \\ y' = 100x, \end{cases} \qquad \text{med} \qquad \begin{cases} (\mathrm{BV})_1: & (x(0), y(0)) = (-0.5, 3) \\ (\mathrm{BV})_2: & (x(0), y(0)) = (2.5, 30). \end{cases}$$

a) Rita kurvorna $x = x(t)$, $0 \le t \le 7$, för $(\mathrm{BV})_1$ och $(\mathrm{BV})_2$ i ett diagram ("strömmen"). (3p)
b) Rita kurvorna $y = y(t)$, $0 \le t \le 7$, för $(\mathrm{BV})_1$ och $(\mathrm{BV})_2$ i ett diagram ("spänningen"). (3p)
c) Rita riktningsfältet och lösningskurvorna $(x(t), y(t))$ ("fasporträtten") i samma diagram, ett för $(\mathrm{BV})_1$ och ett för $(\mathrm{BV})_2$. (4p)

Anm: Du har löst en "Liénard"-differentialekvation; ett viktigt specialfall är "van der Pol's ekvation", se övn 9:41 (sid 9.34)! Problemet ovan beskrivs på sid 4. (Det är hämtat från *MathSoft, Inc: Topics in Mathcad, Differential Equations, 1994.*)

Uppgift 4

I denna uppgift får ni en liten försmak av att använda MATLAB för numeriska beräkningar. MATLAB ligger något närmare maskinen än Maple som ni testat tidigare. I kursen i numerisk analys i E2 kommer ni att köra mycket på matrisproblem, det är då MATLAB riktigt kommer till nytta. I denna kurs håller vi oss till problem i en variabel och tar ett problem att lösa en ekvation som utgångspunkt:

Keplers ekvation från den celesta mekaniken,

$$M = E - e\sin(E),$$

ger ett samband mellan medelanomalin M och den excentriska anomalin E hos en elliptisk bana med excentriciteten e. Vi känner e, som ligger i intervallet $0 < e < 1$, och vill bestämma E så att M antar ett givet värde. Det blir alltså en ickelinjär ekvation i en variabel.

a) Plotta ut ett par lämpliga kurvor över ett intervall i E och se efter hur många lösningar det kan vara! (2p)

b) Det ligger nära till hands att lösa ut E och göra en fixpunktsiteration med

$$g(E) = M + e\sin(E).$$

Visa att denna är konvergent! (Så här gör ofta praktikens folk, görs det förståndigt så fungerar det, men långsamt.) (2p)

c) Kör några steg med denna fixpunktsiteration för $M = 1$ och $e = 0.5$ och lämplig startgissning på E! Du behöver inte göra en färdig subrutin i MATLAB, det räcker att du har ett programstycke som gör en iteration. Hur snabbt avtar felet? Vad är förhållandet mellan felet i lösningen och absolutbeloppet av funktionsvärdet? (Praktikens folk brukar följa skillnaden mellan successiva iterander, hur bra går det i detta fall?) (4p)

d) Gör några steg med en Newtoniteration för samma problem! Konvergerar den fortare? Kan man starta den var som helst? (4p)

e) Jämför så med resultatet av att använda MATLAB:s inbyggda rutin `fzero`! Använd dess parameter `trace` att få ut rapport om vad som händer i varje steg! (2p)

ANVISNINGAR

A. Allmänt

1) De tre första uppgifterna är förmodligen enklast att göra i Maple (vill du använda Mathematica eller MATLAB är det också tillåtet), uppgift 4 skall göras i MATLAB.

2) På Maple-uppgifterna lämnar du lämpligen in hela ditt "worksheet", alltså alla Maple-kommandon. Du kan då lägga in figurerna i samma worksheet (gå in på Options/Plot Display/Inline om Maple öppnar nya fönster för varje figur), och också lägga in kommentarer. Skriv namn och personnummer med Maple *överst på första bladet*, och sedan i början på varje uppgift. Häfta ihop alla blad!

3) För MATLAB-uppgiften är det smidigaste att skriva s k m-filer, som innehåller dina kommandon. Du editerar då först dessa med en editor (ett bra val är MATLAB:s inbyggda editor som du startar med `edit` från MATLAB), och kör sedan hela m-filen från MATLAB genom att skriva dess namn. Exempel: `fixpunkt.m` körs med kommandot `fixpunkt`. För att redovisa så skriver du ut dina m-filer. Dessutom behöver du redovisa vad de ger för utdata. Detta gör du genom att använda kommandot `diary` *filnamn* resp `diary off` som gör att allt du och MATLAB skriver på skärmen även hamnar i en fil som du sedan kan skriva ut. Figurer skriver du ut (med `print`) och lämnar på separat blad (glöm inte att skriva namn och personnummer). Om du kör MATLAB hemma på PC kan du använda s k *notebooks*, som är MATLAB:s motsvarighet till Maples worksheets. Det fungerar så att man kör MATLAB via Microsoft Word, som man också måste ha installerat på sin dator.

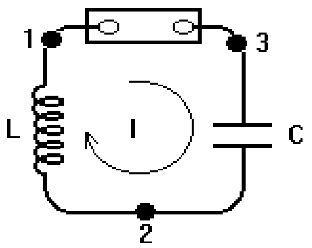
MATLAB finns med på Chalmers Start-CD, som man kan köpa på Cremona för 125 kr. Notebooks finns tyvärr inte i Unix-versionen av Matlab.

4) Till de teoretiska uppgifterna (1a och 4b) kan du lämna handskrivna lösningar.
5) Förbered dig noggrannt innan du sätter dig vid datorn (gula boken, laborationerna från datorintroduktionen, repetera labben till del A). Läs anvisningarna nedan och gå igenom de bifogade exemplen, där finns allt du behöver (och lite till). Är du osäker på något, läs den utförliga onlinehjälpen! I Maple kan du skriva `?plot`, `?plots`, `?dsolve` etc, eller varför inte `??`. Du kan också trycka ctrl-F1 för att få online-hjälp om det ord markören står på eller precis efter. I MATLAB skriver du `help fzero` etc, eller (ännu bättre) `helpdesk` för att få en hypertext-version.

B. Till uppgifterna

1) Det vanligaste är att lösa en differentialekvation med `dsolve` för explicita lösningar och med `dsolve(numeric)` för numerisk beräkning och ritning med `odeplot` (ange begynnelsevillkor, ladda in `plots`). Om du tittar på din lösning så ser du att den går mot ∞ då $x \to \pm\frac{\pi}{2}$ (då $c \geq 0$); Maple ger eventuellt ett overflow-meddelande. Då är det bäst att plotta lösningskurvorna med `plot` om Maple hittar en explicit lösning, eller direkt (bäst, enklast?) med `DEplot` (måste laddas in med `with(DEtools)`), då kan du öka `iterations` (från 1 (=default), välj 3) och minska `stepsize` (välj 0.02) och dessutom rita riktningsfältet, se exempel 1. OBS: Begynnelsevillkoren och variablerna kan skrivas in som mängder eller listor (i det senare fallet beaktas ordningen: 1:a–2:a variabeln).
2) Även här kan man använda `dsolve(numeric)` och `odeplot`, eller `DEplot3d`, xy-porträttet fås också med `DEplot`. Se exempel 2A. OBS: Välj `numpoints` > 2000!
3) Det finns olika sätt att få lösningarna till ett sådant system (”Van der Pol Limit Cycle”), se exempel 2B,C (som löser liknande ”van der Pol”- och ”Volterra-Lotka”-ekvationer). Riktningsfält med lösningskurvor fås även med `phaseportrait`, enbart riktningsfält med `dfieldplot`. Behöver du mer (utförlig) information, läs `?DEplot`, `?DEtools`, `?DEtools[options]`, `?phaseportrait`, `?dfieldplot`. Välj lagom `stepsize` och `numpoints`, så att lösningskurvorna inte ser kantiga ut!
4) Lättaste sättet att plotta kurvor i MATLAB är `ezplot`, se `help ezplot` för mer information. Ett exempel på hur ett enkelt MATLAB-program för Newtoniteration kan se ut hittar du i kursboken i Matematisk analys, avsnitt 7:14. Det går bra att lägga in de aktuella funktionerna direkt i programmet. Vill du vara lite mer ambitiös kan du definiera funktionerna separat (genom att skriva en m-fil `F.m` eller genom att skapa inline-funktioner med `F=inline('...')`). Modifikationen till fixpunktsiteration bör inte vara alltför svår. Du behöver dessutom modifiera programmen för att skriva ut felet mm, vilket enklast görs genom en tilldelning `felet=...` utan semikolon på slutet, det går också att använda `disp`. Till `fzero` kan du ge funktionen vars nollställe skall sökas som en sträng om du kallar den obekanta `x`, annars måste du definiera en funktion (med `inline` eller som m-fil). Se `help fzero` för exempel, där framgår även hur parametern `trace` används.

Let us consider a series RLC circuit, where the resistor is replaced with an active element. The voltage across the active element is a function of the current through the element. Solve for the current in the circuit.



A mathematical model of the circuit above is a system of differential equations: $\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{L}\cdot\left(V_c + f(I)\right)$ and $\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C}\cdot I$

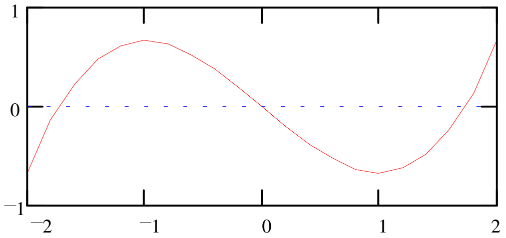
where **I** is the current through the circuit, **L** is the value of the inductor, $\mathbf{V_c}$ is the voltage across the capacitor, **C** is the value of the capacitor and **f(I)** is the voltage across the active element.

Our example circuit consists of an inductor of 1 Henry, a capacitor of 0.01 f arad and an active device with V-I characteristics described by the equation **f(I)= I^3 /3 - I**:

$L := 1 \quad C := .01 \quad f(I) := \frac{I^3}{3} - I \qquad i := -2, -1.8 .. 2$

The active element operates as a negative resistor when the current in the circuit is between -√3 Amps and √3 amps.

Let us examine the circuit current over time. We will consider two different cases. In the first case, the active element operates as a negative resistor at time zero; in the second, the active element operates in a region of positive resistance at time zero.



Starting from time zero we compute **I(t)** for 10 **LC** circuit cycles (0<t< $10\cdot\left(2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}\right)$)

Initial value vectors will be different for each case:

case 1: $i0 := \begin{pmatrix} -.5 \\ 3 \end{pmatrix}$ case 2: $i1 := \begin{pmatrix} 2.5 \\ 30 \end{pmatrix}$

(The first set of initial conditions is a negative resistance point, where the current is small. The second set is a positive resistance point.)