Tentamensuppgifter till matematiska metoder E1, del B, 1998

Här får du ytterligare ett antal tenta-uppgifter från tidigare tentor i del B.

Kapitel 7

a) Lös $je^{2z}+e^{z}+2=4j$. Svaren skall ges på formen $a+jb$.

b) Givna är punkterna $P_0=(a_0,b_0)$ och $P_1=(a_1,b_1)$. Punkterna A och B delar sträckan P_0P_1 i tre lika stora delar ($|\overrightarrow{P_0A}|=|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BP_1}|$). Bestäm en punkt C så att A, B, C är hörnpunkter i en liksidig triangel.

c) Lös ekvationen $2z^2+5jz=4+3j$. Svaren skall ges på formen $a+jb$.

d) Lös ekvationen $\cos z=j$ $\left[\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{jz}+e^{-jz}\right)\right]$.

e) Lös ekvationen $z^5+z^4-3z^3+3z^2-4z+2=0$.

f) z_1,z_2 är rötterna till $z^2+\sqrt{2}z+2=2j$.

f1) Ange z_1 och z_2 på formen $a+jb$.

f2) Beräkna $j^{\sqrt{2}\,z_1}+j^{\sqrt{2}\,z_2}$ [Förenkla svaret !].

Kapitel 9

a) Ange explicit den lösningsbana till differentialekvationen
$y'\cos x\cosh y+\sin x\sinh y=0$ som går genom punkten $\left(0,\ln(1+\sqrt{2}\right)$.

b) Lös problemet $yy''+y'^2=yy'$, $y(0)=y'(0)=1$.

c) Bestäm explicit den lösning $y(x)$ till differentialekvationen
$xy'-y=\sinh(\frac{1}{x})\sinh(\frac{y}{x})$ som går genom punkten

c1) $\left(\frac{1}{\ln 2},0\right)$ **c2)** $\left(\frac{1}{\ln 2},1\right)$.

d) Bestäm $y(x)$ för $x>0$, då $y'(x)=\dfrac{\cos x}{x^4+2x^2}\sqrt{y}-\dfrac{8x^2+8}{x^3+2x}y$, $y(\pi)=0$.

e) Bestäm de kurvor för vilka tangenten i en godtycklig punkt P skär x-axeln i en punkt A så att OP = AP , där O är origo

f) Lös differentialekvationen $xy^2y'-y^3=x^4\sinh(x)$.

Kap 10

a) Lös differentialekvationen $e^x\left(y''+2y'+3y\right)=\sin(\sqrt{2}x)$.

b) Lös differentialekvationen $(D^5+4D^4+4D^3-4D^2-5D)y=5x-1$.

c) Lös differentialekvationen $(D^4+2D^3+3D^2+4D+2)y=9\cos(\sqrt{2}\,x)$.

d) Lös ekvationen $y'''+y''+y'+y=\sinh x$.

e) Lös differentialekvationen $4y'''+y'-5y=13e^x-17\cos(x)$.

f) Lös differentialekvationen $\left(D^4+2D^3-2D^2+2D-3\right)y=3x^2+2x$.

Svar på tentauppgifterna

Kapitel 7

a) $\ln\sqrt{5}+(\operatorname{arc}\cot 2+2k\pi)j$ och $\ln 2+(2k+1)\pi j$

b) $\frac{1}{2}\left(a_0+a_1+\frac{1}{\sqrt{3}}(b_0-b_1),b_0+b_1+\frac{1}{\sqrt{3}}(a_1-a_0)\right)$ eller $\frac{1}{2}\left(a_0+a_1+\frac{1}{\sqrt{3}}(b_1-b_0),b_0+b_1+\frac{1}{\sqrt{3}}(a_0-a_1)\right)$

[det är iterationssteget för konstruktionen av Helge van Koch's kurva (snöflingan, en fraktal (1904), ett exempel på en kontinuerlig kurva som överallt saknar tangent; jämför uppg.19 i Laboration 6 (Magnus))]

c) $1-\frac{1}{2}j$ och $-1-2j$

d) $\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\mp j\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

e) $1, j, -j, -1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}$

f1) $\sqrt{2j}$ och $-\sqrt{2}-\sqrt{2}j$ **f2)** $-2\sinh(1+4k)\pi$

Kapitel 9

a) $\ln\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)$

b) $\sqrt{2e^{2x}-1}$

c1) $y(x)\equiv 0$ **c2)** $y(x)=x\left(\ln\left(3e^{\cosh\frac{1}{x}}+e^{\frac{5}{4}}\right)-\ln\left(3e^{\cosh\frac{1}{x}}-e^{\frac{5}{4}}\right)\right)$

d) $y(x)\equiv 0$ och $y(x)=\left(\dfrac{\sin x}{2x^2\left(x^2+2\right)}\right)^2$

e) $y=kx$ och $y=\frac{k}{x}$

f) $x\cdot\sqrt[3]{3\cosh x+c}$

Kapitel 10

a) $e^{-x}\left(A\sin\sqrt{2}x+\left(B-\frac{1}{2\sqrt{2}}x\right)\cos\sqrt{2}x\right)$

b) $A+Be^{x}+Ce^{-x}+e^{-2x}(D\cos x+E\sin x)+x-\frac{1}{2}x^2$

c) $(Ax+B)e^{-x}+(C-x)\cos\sqrt{2}x+\left(D-\frac{1}{2\sqrt{2}}x\right)\sin\sqrt{2}x$

d) $\left(A-\frac{1}{4}x\right)e^{-x}+B\cos x+C\sin x+\frac{1}{8}e^{x}$

e) $(A+x)e^{x}+e^{-\frac{1}{2}x}(C\cos x+D\sin x)+\frac{5}{2}\cos x+\frac{3}{2}\sin x$

f) $Ae^{x}+Be^{-3x}+C\cos x+D\sin x-2x-x^2$