Svar till Mat. Met. El, del B, TMA042b, 2000-01-14

1. **a)** $z^2-(3-2i)z+5-5i=0 \Leftrightarrow \left(z-\left(\frac{3-2i}{2}\right)\right)^2-\left(\frac{3-2i}{2}\right)^2+5-5i=0 \Leftrightarrow \left(z-\frac{(3-2i)}{2}\right)^2=-\frac{15}{4}+2i$. Sätt $z-\frac{(3-2i)}{2}=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$. $\therefore x^2-y^2+2ixy=(x+iy)^2=-\frac{15}{4}+2i$, $x^2+y^2=|x+iy|^2=|(x+iy)^2|=\left|\frac{-15}{4}+2i\right|=\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2+2^2}=\frac{\sqrt{289}}{4}=\frac{17}{4}$. Vi får genom att identifiera real- och imaginär-delar: $\begin{cases} x^2-y^2=-15/4 \\ 2xy=2 \\ x^2+y^2=17/4 \end{cases} \Rightarrow 2x^2=\frac{1}{2}\to x=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow y=\pm 2$. $\therefore z=\frac{3-2i}{2}=\begin{cases}\frac{1}{2}+2i \\ -\frac{1}{2}-2i\end{cases} \Leftrightarrow z=\begin{cases}\frac{1}{2}+2i+\frac{3-2i}{2}=2+i\equiv\alpha_1 \\ -\frac{1}{2}-2i+\frac{3-2i}{2}=1-3i\equiv\alpha_2\end{cases}$.

   b) Vi har att $\alpha_1\alpha_2=(2+i)(1-3i)=5-5i$, $e^w=\alpha_1\alpha_2\Leftrightarrow w=\log(\alpha_1\alpha_2)=\log(5-5i)=\ln|5-5i|+i(\arg(5-5i)+n2\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$. Alltså är $w=\ln(5|1-i|)+i(\arg(1-i)+n2\pi)=\ln(5\sqrt{2})+i(-\frac{\pi}{4}+n2\pi)$. (OBS: $(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)=z^2-(\alpha_1+\alpha_2)z+\alpha_1\alpha_2$). ■

2. Karakteristiska ekv. är $r^2-5r+6=0\Leftrightarrow r_{1,2}=2,3\Rightarrow y_h=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. Ansätt $y_p=ze^{2x}\Rightarrow 2xe^{2x}=(D^2-5D+6)y_p=(D^2-5D+6)(ze^{2x})=$ [enl. Heavisides förskjutningsregel] $=e^{2x}((D+2)^2-5(D+2)+6)z=e^{2x}(D^2-D)z\Rightarrow(D^2-D)z=2x$. Ansätt $z=Ax^2+Bx+C\Rightarrow z'=2Ax+B, z''=2A$. Insättning i ekv. ger $2A-(2Ax+B)=2x$. Identifikation av koeff. $\Rightarrow\begin{cases}-2A=2 \\ 2A-B=0\end{cases}\Rightarrow A=-1, B=-2$. Välj $C=0$. $\therefore z=-x^2-2x$. $\therefore y_p=-x(x+2)e^{2x}$. $\therefore$ Lösning är $y=y_h+y_p=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-x(x+2)e^{2x}=(C_1-2x-x^2)e^{2x}+C_2e^{3x}$. ■

3. Om nämnaren har rationellt nollställe $\dfrac{p}{q}$ så $p/2$ och $q/1\Rightarrow$ eventuella rationella nollställen är $\pm1,\pm2$. Vi ser att -1 och -2 är nollställen $\Rightarrow x^4+3x^3+3x^2+3x+2=(x+1)(x+2)p(x)=(x^2+3x+2)p(x)$. Division (eller enklare: ident. av koeff.) $\Rightarrow p(x)=x^2+1$. Partialbråksuppdelning $\frac{P}{Q}=\frac{5x^3+11x^2+10x+6}{(x+1)(x+2)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x+2}$. H.P. $\Rightarrow C=1, D=2$. $\therefore \frac{P}{Q}=\frac{(Ax+B)(x+1)(x+2)+(x+2)(x^2+1)+2(x+1)(x^2+1)}{(x+1)(x+2)(x^2+1)}=\frac{(A+3)x^3+(3A+B+4)x^2+(2A+3B+3)x+(2B+4)}{(x+1)(x+2)(x^2+1)}$.

Ident. av koeff. $\Rightarrow \begin{cases} A+3=5 \\ 3A+B+4=11 \\ 2A+3B+3=10 \\ 2B+4=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases}.$

$\therefore \int_0^1 \frac{P}{Q}dx = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}dx = [\ln|x^2+1| + \arctan x + \ln|x+1| + +2\ln|x+2|]_0^1 = \ln 2 + \frac{\pi}{4} + \ln 2 + 2\ln 3 - (0+0+0+2\ln 2) = \frac{\pi}{4} + 2\ln 3.$

■

4. Ekv. $\Leftrightarrow x^2y'' + xy' + y = x\sin(\ln x)$ och detta är en Euler där $x > 0$, ty annars är ej $\ln x$ def. Vi inför ny variabel t enligt $0 < x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$. $\therefore$ $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$, $x^2y'' = x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$. Instättning ger i variabeln t att: $y'' - y' + y' + y = e^t \sin t \Leftrightarrow (D^2+1)y = e^t \sin t$, som är en ekv. med konst.koeff. Kar. ekv.: $r^2+1=0 \Rightarrow r = \pm i \Rightarrow y_h = C_1e^{-it} + C_2e^{it} = A\cos t + B\sin t$. Ansätt för hjälpekvationen $(D^2+1)y = e^{(1+i)t}$ att $w = ze^{(1+i)t} \Rightarrow$ (enl. Heavisides) $\Rightarrow e^{(1+i)t} = (D^2+1)w = (D^2+1)ze^{(1+i)t} = e^{(1+i)t}((D+1+i)^2+1)z \Rightarrow (D^2 + 2(1+i)D + ((1+i)^2+1))z = 1$. Ansätt $z = C$, konst. $\Rightarrow ((1+i)^2+1)C = 1 \Rightarrow C = 1/1+2i = \frac{1-2i}{5}$. $\therefore w = \left(\frac{1-2i}{5}\right)e^{(1+i)t}$ löser hjälpekv. och $e^t\sin t = \text{Im}(e^{(1+i)t}) = \text{Im}((D^2+1)w) = (D^2+1)(\text{Im } w)$ ger $y_p = \text{Im } w = \frac{(\sin t - 2\cos t)e^t}{5}$. $\therefore$ Allmänna lösningen till ekvationen i uppgiften är $y = y_n + y_p = A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x) + \frac{(sin(\ln x) - 2\cos(\ln x))x}{5} = \left(A - \frac{2x}{5}\right)\cos(\ln x) + (B + \frac{x}{5})\sin(\ln x)$. ■

5. $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_\pi^t \frac{\sin x}{x}dx = [PI] = \lim_{t\to\infty}\left(\left[\frac{-\cos x}{x}\right]_\pi^t - \int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}dx\right) = -\frac{1}{\pi} - \int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ om denna senare integral är konvergent. Nu gäller $0 \leq \left|\frac{\cos x}{x}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ och $\int_\pi^\infty \frac{1}{x^2}dx$ konvergent så enligt jämförelsekriteriet gäller att $\int_\pi^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx$ är konvergent. Satsen om absolutkonvergenta integraler ger att också $\int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ konvergent. Alltså är $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ konvergent. ■

6. Ekv. $\Leftrightarrow y' + \frac{4\tan\ln x}{x}y = (2\cos^3\ln x)\sqrt{y}$, Bernoulli med $k = 1/2$ så $y \equiv 0$ är en lösning. Sätt $z = y^{1/2}$ och mult. ekv. med $y^{-1/2} \Rightarrow y^{-1/2}y' + \frac{2\tan\ln x}{x}y^{1/2} = 2\cos^3\ln x \Leftrightarrow 2\frac{d}{dx}(y^{1/2}) + \frac{4\tan\ln x}{x}y^{1/2} = 2\cos^3\ln x \Leftrightarrow z' + \frac{2\tan\ln x}{x}z = \cos^3\ln x$. Integrerande faktor är: $e^{\int\frac{2\tan\ln x}{x}dx}$ och $\int\frac{2\tan\ln x}{x}dx =$

$\begin{bmatrix} t = \ln x \\ \\ dt = \frac{dx}{x} \end{bmatrix} = 2\int \tan t dt = 2\int \frac{\sin t}{\cos t} dt = \begin{bmatrix} s = \cos t \\ \\ ds = -\sin t dt \end{bmatrix} = -2\int \frac{ds}{s} =$
$-2\ln|s| = -\ln s^2 = \ln\left(\frac{1}{\cos^2 \ln x}\right) \Rightarrow$ I.F.$= \frac{1}{\cos^2 \ln x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(z\frac{1}{\cos^2 \ln x}\right) =$
$\cos \ln x \Leftrightarrow z\frac{1}{\cos^2 \ln x} = \int \cos \ln x dx + c_1$. Nu är $\int \cos \ln x dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ \\ dt = \frac{1}{x}dx = \frac{1}{e^t}dx \end{bmatrix} =$
$\int (\cos t)e^t dt = [PI] = (\cos t)e^t + \int (\sin t)e^t dt = [PI] = (\cos t)e^t + (\sin t)e^t - \int (\cos t)e^t\, dt$. $\therefore \int \cos \ln x dx = \int (\cos t)e^t dt = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)e^t = \frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x)$. $\therefore\ y^{1/2} = z = \cos^2 \ln x\big(\frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x) + c_1\big) \Rightarrow y = \frac{(\cos^4 \ln x)}{4}(x(\cos \ln x + \sin \ln x) + c)^2$ eller $y \equiv 0$.