# Svar till Mat. Met. El, del B, TMA042b, 1999-12-17

1. $x^3y' = 4\ln x - 2x^2y \Leftrightarrow y' + \frac{2}{x}y = \frac{4\ln x}{x^3}$, linjär $\int \frac{2}{x}dx = 2\ln|x| = \ln x^2 \Rightarrow$ Int. faktor : $e^{\ln x^2} = x^2 \therefore \frac{d}{dx}(x^2y) = 4\frac{\ln x}{x} \Rightarrow x^2y = 4\int \frac{\ln x}{x}dx + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Nu är $\int \frac{\ln x}{x}dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix} = \int t dt = t^2/2 \Rightarrow x^2y = 2(\ln x)^2 + C \Rightarrow$
$y = (2(\ln x)^2 + C)/x^2$. ■

2. Sätt $w = e^z \Rightarrow w^2 - iw = 1 + i \Leftrightarrow \left(w - \frac{i}{2}\right)^2 - \left(\frac{i}{2}\right)^2 = 1 + i$
$\Leftrightarrow \left(w - \frac{i}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + i$. Sätt $w - \frac{i}{2} = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\therefore \begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{3}{4} \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = |x+iy|^2 = |(x+iy)^2| = |\big(w - \dfrac{i}{2}\big)^2| = |\dfrac{3}{4} + i| = \sqrt{\dfrac{9}{16} + 1} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow 2x^2 = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}$. $\therefore w_1 - \frac{i}{2} = 1 + \frac{i}{2} \Rightarrow w_1 = 1 + i$, $w_2 - \frac{i}{2} = -1 - \frac{i}{2} \Rightarrow w_2 = -1$. $\therefore e^{z_i} = w_i \Rightarrow z_1 = \log w_1 = \log(1+i) = \ln|1+i| + i(\arg(1+i) + n2\pi) = \ln\sqrt{2} + i\big(\frac{\pi}{4} + n2\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.
$z_2 = \log w_2 = \log(-1) = \ln|-1| + i(\arg(-1) + n2\pi) = i(\pi + n2\pi) = i(2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

3. $(D^4 - 3D^2 - 4)y = e^{-2x}$ har kar.ekv: $r^4 - 3r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow s^2 - 3s - 4 = 0$ där $s = t^2$ som har rot $s = -1$ så $0 = (s+1)(s-4)$, dvs $s_1 = -1, s_2 = 4 \Rightarrow t_{1,2} = \pm i$, $t_{3,4} = \pm 2$. $\therefore y_h = Ae^{-2x} + Be^{2x} + C\cos x + D\sin x$. För att finna partikulärlösning $y_p$ ansätter vi $y_p = ze^{-2x} \Rightarrow e^{-2x} = P(D)(ze^{-2x}) = e^{-2x}P(D-2)z$ enligt Heavisides förskjutningsregel $\Rightarrow 1 = P(D-2)z = ((D-2)^4 - 3(D-2)^2 - 4)z = (D^4 - 8D^3 + 21D^2 - 20D)z$. Ansätt alltså $z$ som ett 1:a-gradspolynom $z = \alpha x + \beta \Rightarrow -20\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -1/20$ och välj $\beta = 0$. $\therefore y_p = -\frac{x}{20}e^{-2x}$ så lösningarna till $(D^4 - 3D^2 - 4)y = e^{-2x}$ ges av $y = y_h + y_p = Ae^{-2x} + Be^{2x} + C\cos x + D\sin x - \dfrac{x}{20}e^{-2x}$ där $A, B, C$ och $D$ är konstanter. ■

4. Vi ser att $y = 0$ är en lösning och för $y \neq 0$ har vi att ekv. $\Leftrightarrow y'' = yy' + (y')^2/y = f(y, y')$ så vi sätter $p = y'$ och använder kedjeregeln: $y'' = \dfrac{d}{dx}(y') = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$. $\therefore p\frac{dp}{dy} = py + \frac{p^2}{y} \Leftrightarrow \frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = y$ för $p \neq 0$,

som är linjär. Nu är $\displaystyle\int -\frac{1}{y}dy = -\ln|y|$ så en int. faktor är: $e^{-\ln|y|} = \dfrac{1}{|y|}$.
$\therefore \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{|y|}p\right) = \frac{y}{|y|} \Leftrightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}p\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{p}{y} = y + c_1 \Leftrightarrow y' = p = y^2 + c_1 y \Leftrightarrow$ $y' - c_1 y = y^2$, (Bernoulli), $\Leftrightarrow y^{-2}y' - c_1 y^{-1} = 1$. Sätt $z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{1}{y^2}y'$. $\therefore -z' - c_1 z = 1 \Leftrightarrow z' + c_1 z = -1$ som är linjär med $\int c_1 dx = c_1 x$ så en int. faktor är: $e^{c_1 x}$ $\therefore \frac{d}{dx}(e^{c_1 x}z) = -e^{c_1 x} \Leftrightarrow e^{c_1 x}z = \int -e^{c_1 x}dx + c_2 \Rightarrow$ $-\frac{1}{c_1} + c_2 e^{-c_1 x} = z = \frac{c_1 c_2 e^{-c_1 x} - 1}{c_1} = \frac{-Ac_2 e^{Ax} - 1}{-A} \to y = A/(Ac_2 e^{Ax} + 1)$.

Villkoret $p \neq 0$ ger om ej uppfyllt $y' = p = 0$ dvs $y =$ konst. Dessa lösningar (speciellt $y = 0$) ingår i den allmänna lösningen $y = A/(ABe^{Ax} + 1)$. ■

5. $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_\pi^t \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\left[\frac{-\cos x}{x}\right]_\pi^t - \int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}dx\right) = -\frac{1}{\pi} -$ $\lim_{t\to\infty}\int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}dx$. Nu gäller $0 \leq \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ och $\int_\pi^\infty \frac{1}{x^2}dx$ konvergent så enligt jämförelse kriteriet gäller att $\int_\pi^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx$ konvergent. Enligt satsen om absolutkonvergenta integraler så är då också $\int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ konvergent, dvs $\lim_{t\to\infty}\int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}dx$ existerar. Därför existerar enligt ovan $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_\pi^t \frac{\sin x}{x}dx$, dvs $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ är konvergent. ■

6. Vi ser att $y'' - (1 + \frac{1}{x})y' + \frac{1}{x}y = (D^2 - D - \frac{1}{x}D + \frac{1}{x})y = (D(D-1) - \frac{1}{x}(D - 1))y = (D - \frac{1}{x})(D-1)y$. Sätt $w = (D-1)y$ och lös $(D - \dfrac{1}{x})w = x$ som är linjär med $\int -\frac{1}{x}dx = -\ln|x| = \ln|x|^{-1}$ och int. faktor $e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{1}{|x|}$. Detta ger $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{|x|}w\right) = \frac{x}{|x|} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}w\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}w = x + c_1 \Rightarrow (D-1)y =$ $w = x^2 + c_1 x$ som är linjär med $\int -1dx = -x$ och int. faktor $e^{-x}$. Detta ger $\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = e^{-x}(x^2 + c_1 x)$ så att $e^{-x}y = \int e^{-x}(x^2 + c_1 x)dx + c_2 =$ $[PI] = -(x^2 + c_1 x)e^{-x} + \int(2x + c_1)e^{-x}dx + c_2 = [PI] = -(x^2 + c_1 x)e^{-x} -$ $(2x + c_1)e^{-x} + \int 2e^{-x}dx + c_2 = -(x^2 + c_1 x)e^{-x} - (2x + c_1)e^{-x} - 2e^{-x} + c_2 =$ $-(x^2 + (c_1 + 2)x + c_1 + 2)e^{-x} + c_2$. $\therefore y = -(x^2 + Ax + A) + Be^x$ där $A, B$ är konstanter. ■