Matematiska Institutionen
CTH & GU

Lösningsförslag till Veckans Problem 1
Mat. Met. E del B, TMA042b, lp II, ht1999

Veckans Problem 1: Vi fann som del i en på föreläsningarna demonstrerad uppgift, problem 6.24 ℓ, följande obestämda integral: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C$, där C är en godtycklig konstant. Vi gjorde detta genom att använda substitutionen $t = x^2$. Detta är i det aktuella fallet det enklaste. Ibland kan det dock som vi nämnt vara av värde att 'substituera bort hela rotuttrycket'. Genomför detta för integralen ovan. Den så funna primitiva funktionen 'ser inte likadan ut' som den tidigare funna, dvs $\frac{1}{2}\arcsin x^2$. Vi vet dock att dessa funna funktioner bara skiljer sig åt med en konstant. Visa det (som ett test av att du genomfört variabelsubstitutionen med rotuttrycket på ett riktigt vis). Finn även konstanten.

Lösning: I integralen $I \equiv \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ gör vi substitutionen $t = \sqrt{1-x^4}$, $dt = (-2x^3)/\sqrt{1-x^4}dx$. Observera att $t^2 = 1 - x^4$ som ger att $x^2 = \sqrt{1-t^2}$ då ju x^2 är icke-negativ. Så $dt = (-2\sqrt{1-t^2}/t)xdx$. Alltså får vi vid variabelsubstitutionen att $I = -\frac{1}{2}\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{t}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\frac{1}{2}\arcsin t + C$ där C är en godtycklig konstant. Utryckt i termer av x, dvs insatt vad t är uttryckt i x, får vi att $I = -\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{1-x^4} + C$. Tydligen ska då $\frac{1}{2}\arcsin x^2 = -\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{1-x^4} + C$. Vi visar nu detta direkt utan att gå vägen över variabelsubstitution.

Låt $f(x) = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + \frac{1}{2}\arcsin\sqrt{1-x^4}$. Derivation ger att $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{1}{2}\frac{(-4x^3/2\sqrt{1-x^4})}{\sqrt{1-(1-x^4)}} = 0$ i $(-1,1)$. Därför är $f(x)$ =konst. i intervallet $(-1,1)$. Vi ser vidare att $f(0) = \frac{1}{2}\arcsin 1 = \pi/4$. Dvs $\frac{1}{2}\arcsin x^2 = -\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{1-x^4} + \pi/4$.

Veckans Problem 2

(Lösningen skall vara klar tors. 11/11)

Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Repetitionsfrågor

- Vad är en rationell funktion?
- Vad är ett partialbråk?
- Hur beräknar man $\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}}$?
- Hur beräknar man $\int \frac{Ax+B}{(x^2+2ax+b)^n}\,dx$?
- Hur partialbråksuppdelar man en rationell funktion?
- Förklara metoden med 'handpåläggning'.
- Ange en metod att integrera vissa integraler innehållande rotuttryck.
- Hur beräknar man $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$?

- Hur beräknar man $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ där $P(x)$ är ett polynom?
- Ange metoder för att beräkna vissa integraler som innehåller rotuttrycken $\sqrt{1+x^2}$ respektive $\sqrt{1-x^2}$.
- Ange fyra av de vanligaste metoderna för att beräkna integraler av trigonometriska funktioner.
- Bevisa att $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.
- Vad är generaliserade integraler? Hur definieras de och hur beräknas de?
- Hur kan du avgöra om en generaliserad integral är konvergent eller divergent?
- För vilka reella tal α konvegerar $\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx$ respektive $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx$?
- Bevisa satsen om absolutkonvergens.
- Stämmer påståendet: $\int_a^b f(x)\,dx$ och $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergenta $\Leftrightarrow$ $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$ konvergent? Bevisa eller ge motexempel.

Extrauppgifter

- Bestäm alla primitiva funktioner till $\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+1}}$.

  Svar: $(2/3)\sqrt{x^3+1} + (2/3)\ln(x^{3/2} + \sqrt{x^3+1}) + C$.
- Bestäm alla primitiva funktioner till $\frac{\sin x\cos^3 x+\sin^3 x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

  Svar: $(1/2)\arctan(\tan^2 x) + C$.
- Bestäm en primitiv funktion till $\frac{\sin^3 x+\sin x}{\cos^3 x+\cos x}$.

  Svar: $\ln(\cos^2 x) + \ln(\cos^2 x + 1)^{3/2}$.
- Bestäm alla primitiva funktioner till $\frac{\sqrt{\ln x}}{x+x\ln x}$.

  Svar: $2\sqrt{\ln x} - \arctan\sqrt{\ln x} + C$.
- Bestäm alla primitiva funktioner till $\frac{\cos x}{3+\cos x}$.

  Svar: $2\arctan(\tan\frac{x}{2}) - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}) + C$.
- Beräkna $\int_{\sqrt{3}}^\infty \frac{1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$.

  Svar: $\frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}-1) - \frac{\pi}{12}$.