Matematiska Institutionen
CTH & GU

Lösningsförslag till Veckans Problem 2
Mat. Met. E del B, TMA042b, lp II, ht1999

Veckans Problem 2: Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Lösning: Vi skriver integralen som $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$ så att $2x$ är inre derivata, dvs $2x/(1+x^2)^2$ har primitiv funktion $-1/(1+x^2)$. Vi finner nu genom Partial Integration en primitiv funktion till integranden. Observera att vi **inte** gör partialintegration av den bestämda (generaliserade) integralen. Att integralen är generaliserad beror på att 1) vi har ett obegränsat intervall (upp till ∞) och 2) integranden är inte kontinuerlig (inte ens definierad) i vänstra intervalländpunkten 0. Vi får $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}([(-\frac{1}{1+x^2})\ln x]+\int \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{x}\,dx$. Partialbråksuppdelning ger: $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{1}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{x^2+1+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$ där A har bestämts till 1 genom handpåläggning. Identifikation av koefficienterna av de två uttrycken i täljarna innebär att $1+B=0,\ C=0$, dvs $B=-1,\ C=0$. Alltså är $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}$ så $\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$. Från detta fås att $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}(-\frac{1}{1+x^2}\ln x+\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1))+C$. Vi erhåller nu att $\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}[-\frac{1}{1+x^2}\ln x+\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_0^\infty = \frac{1}{2}(\lim_{x\nearrow\infty}(-\frac{1}{1+x^2}\ln x+\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)) - \lim_{x\searrow 0}(-\frac{1}{1+x^2}\ln x+\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1))) = \frac{1}{2}(0+\lim_{x\nearrow\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \lim_{x\searrow 0}((1-\frac{1}{1+x^2})\ln x)+0) = \frac{1}{2}(0+\lim_{x\searrow 0}\frac{x^2\ln x}{1+x^2}) = -\frac{1}{2}\lim_{x\searrow 0}x^2\ln x = 0$. Observera att vi har slagit ihop olika termer i uttrycket $(-\frac{1}{1+x^2}\ln x+\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1))$, beroende på vilket gränsvärde vi beaktar, $x\to\infty$ eller $x\to 0$. Hade vi beräknat den bestämda integralen med partialintegration hade denna möjlighet gått förlorad om vi hade gått i gräns redan direkt efter partialintegrationen.
En i detta fall elegantare lösning baserad på ett 'trick' kan fås genom substitutionen $t=1/x$ som är oproblematisk då vi ju ser direkt att integralen är konvergent. Om vi betecknar den i uppgiften givna integralen med I så ger den nyss nämnda substitutionen att $I=-I$, dvs $2I=0$.

Veckans Problem 3

(Lösningen skall vara klar tors. 18/11)

Veckans problem har tre delar:

1. På en gammal sjörövarkarta anges läget av en gömd skatt på följande sätt: 'På sydsidan av ön X finns en liten lagun. Vid stranden står en gammal galge och i närheten av denna två ensamma palmer. Gå från galgen till den vänstra palmen och därifrån vinkelrätt åt höger en lika lång sträcka till punkten P. Gå därpå från galgen till den högra palmen och därifrån vinkelrätt åt vänster en lika lång sträcka till punkten Q. Skatten ligger mitt emellan P och Q.' Vid framkomsten till ön finner man tyvärr att galgen helt ruttnat bort, så att den inte kan återfinnas. Palmerna kan däremot identifieras. Visa att man ändå kan hitta skatten.

2. Antag att polynomet $P(z)$ har nollstället α med multiplicitet k. Visa att om $k>1$ så är α nollställe av multiplicitet $k-1$ till derivatan $P'(z)$. Om $k=1$ så är α inte nollställe till $P'(z)$.

3. Visa att $\prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{2k\pi\imath/n}) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1$.

Repetitionsfrågor

Vad är $Re z$ resp. $Im z$ för ett komplext tal z? Låt z_1, z_2 vara komplexa tal. Visa att $z_2 - z_1$ är den enda lösningen till ekvationen $z + z_1 = z_2$. Definiera $|z|$. Visa att $|z|^2 = z\bar{z}$, $|Re\ z| \leq |z|$, $|Im\ z| \leq |z|$ och $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Formulera och bevisa triangelolikheten för komplexa tal. Triangelolikheten ger en uppskattning uppåt av $|z_1 + z_2|$. Ge en uppskattning **nedåt** av $|z_1 + z_2|$. Vad betyder geometriskt addition och subtraktion av två komplexa tal? Vad betyder geometriskt $|z|$? Vad menas med den polära framställningen av ett komplext tal? Definiera $\arg z$. Vad betyder geometriskt multiplikation och division av två komplexa tal? Definiera $e^{i\theta}$ då $\theta \in \mathbf{R}$. Bevisa att $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. Formulera och bevisa Moivres formel. Formulera och bevisa Eulers formler. Definiera e^z för z komplext tal. Visa att för komplexa tal gäller $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. Visa att $\frac{d}{dx}e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$ för komplext tal α och reellt x. Definiera $\log z$ för komplext z. Vad menas med ett komplext polynom? Formulera divisionsalgoritmen för polynom. Vad är innebörden av att polynomet $P(z)$ är delbart med polynomet $Q(z)$? Formulera Algebrans Fundamentalsats. Formulera och bevisa Faktorsatsen. Formulera och bevisa satsen om konjugerat komplexa rötter. Visa att för ett reellt polynom finns en faktorisering i reella polynom av högst andra graden. Formulera och bevisa satsen om rationella rötter till en ekvation med heltalskoefficienter. Vilka av följande påståenden är sanna resp. falska? Motivera svaren! **a)** Varje reell tredjegradsekvation har minst en reell rot. **b)** Varje reell fjärdegradsekvation har minst två reella rötter. **c)** Varje rationell rot till en ekvation $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0$ med heltalskoefficienter är själv ett heltal. **d)** Varje algebraisk ekvation med heltalskoefficienter har minst en rationell rot. **e)** Om P är ett polynom och P' dess derivata, så är varje enkelrot till ekvationen $P'(z) = 0$ en dubbelrot till ekvationen $P(z) = 0$.

Extrauppgifter

- Visa att om r_1 0ch r_2 är rötter till ekvationen $z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ så gäller att $r_1 + r_2 = -a_1$ och $r_1 r_2 = a_0$.
- Formulera och visa ett analogt påstående för en tredjegradsekvation $z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ med (tre) rötter z_1, z_2, z_3.
- Låt $P(z)$ vara ett polynom. Division av $P(z)$ med $P'(z)$ ger $P(z) = (az + b)P'(z) + R(z)$. Visa att om α är en multipelrot så är $R(\alpha) = 0$.
- Använd resultatet i föregående övning till att lösa ekvationen $z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 20z - 12 = 0$.