Matematiska Institutionen
CTH & GU

**Lösningsförslag till Veckans Problem 3**
Mat. Met. E del B, TMA042b, lp II, ht1999

**Veckans Problem 3:** Veckans problem har tre delar:

1. På en gammal sjörövarkarta anges läget av en gömd skatt på följande sätt: 'På sydsidan av ön $X$ finns en liten lagun. Vid stranden står en gammal galge och i närheten av denna två ensamma palmer. Gå från galgen till den vänstra palmen och därifrån vinkelrätt åt höger en lika lång sträcka till punkten $P$. Gå därpå från galgen till den högra palmen och därifrån vinkelrätt åt vänster en lika lång sträcka till punkten $Q$. Skatten ligger mitt emellan $P$ och $Q$.' Vid framkomsten till ön finner man tyvärr att galgen helt ruttnat bort, så att den inte kan återfinnas. Palmerna kan däremot identifieras. Visa att man ändå kan hitta skatten.

2. Antag att polynomet $P(z)$ har nollstället $\alpha$ med multiplicitet $k$. Visa att om $k > 1$ så är $\alpha$ nollställe av multiplicitet $k-1$ till derivatan $P'(z)$. Om $k = 1$ så är $\alpha$ inte nollställe till $P'(z)$.

3. Visa att $\prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{2k\pi\imath/n}) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1$.

**Lösning: 1)** Vi 'lägger in' kartan i det komplexa talplanet och låter $p_1$ och $p_2$ vara de komplexa tal som markerar palmernas läge; $p_1$ är vänstra palmen. Vi låter vidare $g$ vara läget av galgen, (som vi inte känner) och $o$ vara origo. Vektorn från $g$ till $p_1$ är $p_1 - g$. Vektorn från $g$ till $p_2$ är $p_2 - g$. Hade $g$ varit känd så hade vi funnit punkten $P$ som $P = g + (p_1 - g) - \imath(p_1 - g)$ och $Q$ som $Q = g + (p_2 - g) + \imath(p_2 - g)$. Punkten $S$ mitt emellan $P$ och $Q$ där skatten finns ges av $S = P + 1/2(Q - P) = 1/2(P + Q)$. Insättning av uttrycken för $P$ och $Q$ ger oss $S = 1/2(g + (p_1 - g) - \imath(p_1 - g) + g + (p_2 - g) + \imath(p_2 - g) = 2g + p_1 + p_2 - 2g - \imath p_1 + \imath g + \imath p_2 - \imath g = (p_1 + p_2)/2 - \imath(p_1 - p_2)/2$. Detta uttryck beror inte på $g$ så vi kan relatera beskrivningen till vilken punkt vi vill när vi har funnit palmerna. I själva verket ser vi från uttrycket för $S$ att vi ska ta halva vektorn från $p_2$ till $p_1$ och vrida den medurs 90 grader och lägga till den så erhållna vektorn till mittpunkten mellan $p_1$ och $p_2$.
**2)** Då $\alpha$ nollställe till $P$ av ordning $k$ så har vi $P(z) = (z-\alpha)^k Q(z)$ för ngt polynom $Q(z)$ med $Q(\alpha) \neq 0$. Enligt derivationsregeln för en produkt finner vi $P'(z) = k(z-\alpha)^{k-1}Q(z) + (z-\alpha)^k Q'(z) = (z-\alpha)^{k-1}R(z)$ där $R(z) = kQ(z) + (z-\alpha)Q'(z)$ uppfyller $R(\alpha) = kQ(\alpha) + 0 \neq 0$. Alltså är $\alpha$ ett nollställe till derivatan $P'(z)$ av multiplicitet $k-1$. Om $k = 1$ är alltså $\alpha$ ej nollställe ty då av multiplicitet 0. Vi ser ju oxå direkt att då är $P'(z) = Q(z) + (z-\alpha)Q'(z)$ så $P'(\alpha) = Q(\alpha) + 0 \neq 0$.
**3)** En geometrisk serie har $N$:te partialsumma $S_N = \sum_{k=0}^{N} a^k$ som kan fås som $S_N = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ genom att se att $(1-a)S_N = S_N - aS_N = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{N-1} + a^N - a(1 + a + a^2 + \ldots + a^{N-1} + a^N) = 1 - a^{N+1}$. Alltså har vi att $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{z^n-1}{z-1}$. Den binomiska ekvationen $z^n - 1$ har nollställen $z_k = e^{\imath k2\pi/n}$ för $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Alltså är $z^n - 1 = (z - e^{\imath 0\cdot 2\pi/n})(z - e^{\imath 1\cdot 2\pi/n})\ldots(z - e^{\imath(n-1)\cdot 2\pi/n}) = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{\imath k2\pi/n})$. Härav följer att $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{z^n-1}{z-1} = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{\imath k2\pi/n})/z - 1 = \prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{\imath k2\pi/n})$.

# Veckans Problem 4

(Lösningen skall vara klar tors. 25/11)

Finn den lösning $y(x)$ till $xy' - 2y = x^3 \cos x$ som uppfyller $y(-\pi) = -\pi^2$ och $y(\pi) = \pi^2$.

# Repetitionsfrågor

- Vad är en differentialekvation?
- Definiera begreppet 'ordning' för en differentialekvation.
- Vad innebär det att en differentialekvation är 'ordinär'?
- Vad är en (ordinär) linjär differentialekvation av första ordningen?
- Formulera och bevisa (eller snare bevisa och formulera, då ju bevismetoden är det viktiga och i andra hand formeln) satsen om lösningar till en (ordinär) linjär differentialekvation av första ordningen.
- Vad är den 'integrerande faktorn'?
- Vad är en 'separabel' differentialekvation?
- Formulera och bevisa en sats om lösning av separabla differentialekvationer.
- Vad är differentialformen av en separabel differentialekvation?
- Vad betyder att lösningar ges implicit?
- Vad är en allmän lösning?
- Vad är en singulär lösning?
- Kan två olika differentilekvationer ha samma differentialform?
- Vad innebär skarvning av lösningar?
- Hur löses $y'(x) = f(ax + by)$?
- Hur löses $y'(x) = f(y/x)$?
- Vad är Bernoullis differentialekvation och hur löser man den?

# Extrauppgifter

- Verifiera att $y(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt + e^{x^2}$ löser $y' - 2xy = 1$.
- Lös $(1 - x^2)y' - y = (1 + x)^2(1 - x)$ för $-1 < x < 1$ med $y(0) = 1$.

  Svar: $y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}(2 + x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x)$.
- Lös på största möjliga mängd $(x^2 - 1)y' - xy = 0$ och ange den mängden.

  Svar:
  $y(x) = C_1\sqrt{x^2 - 1},\ x < -1,\ y(x) = C_2\sqrt{1 - x^2},\ -1 < x < 1,\ y(x) = C_3\sqrt{x^2 - 1},\ 1 < x.$
- Vid ett elavbrott var det eluppvärmda husets termostater inställda på 20°C, men eftersom det var konstant $-9$°C ute hade innetemperaturen kl. 17.00 sjunkit till 16°C och kl. 18.00 till 14°C. När inträffade strömavbrottet? Vad var innetemperaturen när strömmen återkom kl. 19.07?

  Svar: kl. 15.13, 12°C.
- Lös integralekvationen $\int_1^x (x + t)f(t)\, dt = x - 1$.

  Svar: $f(x) = 1/(2x\sqrt{x})$.
- Lös $y' - 2y = 2x\sqrt{y}$.

  Svar: $y(x) = (x + 1 + Ce^x)^2$, $y(x) = 0$.