Matematiska Institutionen
CTH & GU

Lösningsförslag till Veckans Problem 5
Mat. Met. E del B, TMA042b, lp II, ht1999

Veckans Problem 5: Lös differentialekvationen $y'' - 2y' + 2y = 2x^2 e^x \sin^2 \frac{x}{2}$

Lösning: Vi skriver om $\sin^2 \frac{x}{2}$ mha dubbla vinkeln. Vi har ju $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin x$ så $\sin^2 \frac{x}{2} = (1 - \cos x)/2$. Vår ekvation är alltså ekvivalent med $P(D)y = (D^2 - 2D + 2)y = x^2 e^x - x^2 e^x \cos x$.

Karakteristiska ekvationen för den homogena ekvationen är $r^2 - 2r + 2 = 0$ som har lösningar $r = 1 \pm \imath$ och ger oss homogenlösning $y_h = C_1 e^{(1-\imath)x} + C_2 e^{(1+\imath)x} = e^x(A\cos x + B\sin x)$.

Vi delar härnast upp högerledet i två bitar och löser var och en för sig för att sedan pga lineariteten hos operatorn $P(D)$ kunna kombinera dessa lösningar till en lösning för ekvationen med det ursprungliga högerledet.

För att finna partikulärlösning till $P(D)y = x^2 e^x \cos x$ löser vi hjälpekvationen $P(D)y = x^2 e^x e^{\imath x} = x^2 e^{(1+\imath)x}$. Vi ansätter $v_p = z e^{(1+\imath)x}$ och med hjälp av Heavisides förskjutningsregel får vi: $x^2 e^{(1+\imath)x} = P(D) z e^{(1+\imath)x} = e^{(1+\imath)x} P(D + 1 + \imath) z$ som ger oss $P(D + 1 + \imath)z = x^2$. Nu är $P(D + 1 + \imath) = (D + 1 + \imath)^2 - 2(D + 1 + \imath) + 2 = D^2 + 2\imath D$ så vi får att lösa: $(D^2 + 2\imath D)z = x^2$. Vi ansätter $z_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ som ger $z_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$ och $z_p'' = 6Ax + 2B$. Insättning ger $6Ax + 2B + 2\imath(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2$ och identifikation av koefficienter ger $\begin{cases} 6A\imath &= 1 \\ 6A + 4B\imath &= 0 \\ 2B + 2C\imath &= 0 \end{cases}$ med lösning $A = -\imath/6,\ B = 1/4,\ C = \imath/4$. Det finns inget krav på D och då vi bara söker en partikulärlösning väljer vi D så enkel som möjligt, dvs vi väljer $D = 0$. Vi får alltså en partikulärlösning $v_p = (\frac{-\imath}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{\imath}{4}x)e^{(1+\imath)x}$ till hjälpekvationen. Då ser vi att $x^2 e^x \cos x = x^2 e^x \mathrm{Re}(e^{\imath x}) = \mathrm{Re}\, x^2 e^x e^{\imath x} = \mathrm{Re} P(D) v_p = P(D) \mathrm{Re} v_p$ ty $P(D)$ har reella koefficienter; dvs $\mathrm{Re} v_p$ är en lösning till $P(D)y = x^2 e^x \cos x$. Vi har att $\mathrm{Re} v_p = \mathrm{Re}((\frac{-\imath}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{\imath}{4}x)(\cos x + \imath \sin x)e^x) = \frac{1}{4}x^2 e^x \cos x - (\frac{-x^3}{6} + \frac{x}{4})e^x \sin x$.

För att lösa $P(D)y = x^2 e^x$ ansätter vi $w_p = z e^x$ och får på samma vis som ovan att $x^2 e^x = P(D) w_p = P(D) z e^x = e^x P(D + 1) z$ som innebär att $(D^2 + 1)z = x^2$ för vilken vi ansätter $z_p = Ax^2 + Bx + C$. Insättning ger $2A + Ax^2 + Bx + C = x^2$ och identifikation av koefficienter ger att $A = 1, B = 0$ och $C = -2$. Alltså är $w_p = (x^2 - 2)e^x$ en partikulärlösning till $P(D)y = x^2 e^x$.

Vi har nu att lineariteten hos $P(D)$ ger att en partikulärlösning y_p till $P(D)y = x^2 e^x - x^2 e^x \cos x$ är $y_p = w_p - v_p = (x^2 - 2)e^x - (\frac{1}{4}x^2 e^x \cos x - (\frac{-x^3}{6} + \frac{x}{4})e^x \sin x)$.

Slutligen ser vi att lösningarna till det ursprungliga problemet alltså är $y = y_h + y_p = e^x[x^2 - 2 + (A - \frac{1}{4}x^2)\cos x + (B + \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}x^3)\sin x]$.

Repetitionsfrågor

- Formulera och bevisa en sats om den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen $P(D)y = g(x)$, där $P(D)$ är en linjär differentialoperator.

- Låt $P(D)$ vara en linjär differentialoperator av n:te ordningen med konstanta koefficienter. Beskriv hur man finner en partikulärlösning y_p till $P(D)y = g(x)$ i det fall då $g(x)$ är

  a) ett polynom

  b) ett polynom multiplicerat med en exponentialfunktion

  c) en produkt av ett polynom, en exponentialfunktion och en sinus/cosinus-funktion.

d) en summa av flera funktioner; $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_m(x)$.

- Låt $P(D)$ vara en linjär differentialoperator av n:te ordningen med konstanta koefficienter. Beskriv hur man reducerar detta till att lösa ekvationer av 1:a ordningen.
- Problemet i förra punkten kan ges en matrisformulering. Beskriv detta och hur man reducerar en högre ordningens operator till ett system av första ordningens ekvationer och ge matrisformuleringen av detta.
- Formulera Eulers differentialekvation och ange en lösningsmetod för den.
- Vad är egenvärde och egenvektor samt hur finner man dessa för en given matris A?
- Formulera och bevisa en sats om partikulärlösningar till en matrisdifferentialekvation $y' = Ay$ för en matris A.