Matematiska Institutionen
CTH & GU

Lösningsförslag till Veckans Problem 4
Mat. Met. E del B, TMA042b, lp II, ht1999

Veckans Problem 4: Finn den lösning $y(x)$, definierad på hela $\mathbf{R}$, till $xy' - 2y = x^3 \cos x$ som uppfyller $y(-\pi) = -\pi^2$ och $y(\pi) = \pi^2$.

Lösning: Formuleringen av VP 4 ovan har ändrats lite; jag har lagt till explicit det som innan var underförstått. Nämligen att lösa ekvationen på så stor definitionsmängd som möjligt, och det betyder i detta fallet hela den reella axeln.
Vi ser att för $x \neq 0$ så är ekvationen ekvivalent med $y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x$ och denna är linjär av första ordningen. En primitiv funktion till $-2/x$ är $-2\ln x$ och då är en integrerande faktor $e^{-\ln x^2} = 1/x^2$. Ekvationen är därför ekvivalent med $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^2}y) = \cos x$ så integration och lösande för y ger $y = x^2(\sin x + C)$ där C är en godtycklig konstant. Vi får därför att den allmänna lösningen är $y(x) = \begin{cases} x^2(\sin x + C_1) & \text{för} \quad x > 0 \\ x^2(\sin x + C_2) & \text{för} \quad x < 0 \end{cases}$, där C_1, C_2 är godtyckliga konstanter. Alltså är varje lösning på ett intervall som innehåller 0 av denna typ. Vi ser vidare att lösningen ovan självt är en lösning även i 0 ty $y'_+(0) = \frac{d}{dx}(x^2(\sin x + C_1))|_{x=0} = (2x(\sin x + C_1) + x^2 \cos x)|_{x=0} = 0$ och analogt fås $y'_-(0) = 0$ så att derivatan i 0 existerar och $y'(0) = 0$. Vi använder nu de givna villkoren på den sökta lösningen för att bestämma konstanterna. Vi ser att $-\pi^2 = y(-\pi) = (-\pi)^2(0 + C_2)$ ger att $C_2 = -1$ och analogt finner vi att $C_1 = 1$.
Vi har alltså 'skarvat ihop' lösningar på de två delintervallen $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$ och denna ihopskarvade lösningeg är en lösning även i punkten $x = 0$, dvs vi har fått en lösning som är definierad på hela reella axeln.

Veckans Problem 5

(Lösningen skall vara klar tors. 2/12)

Lös differentialekvationen $y'' - 2y' + 2y = 2x^2 e^x \sin^2 \frac{x}{2}$.

Repetitionsfrågor

- Vad är en linjär differentialekvation?
- Vad är en linjär operator?
- Visa att om $P(r)$ är ett polynom med konstanta koefficienter så är $P(D)$ en linjär differentialoperator.
- Visa att om koefficienterna i $P(D)$ och $Q(D)$ är konstanta så är $P(D)Q(D)y = P(D)Q(D)y$.
- Formulera och bevisa Heavisides förskjutningsregel.
- Vad är en homogen och vad är en inhomogen differentialekvation?
- Vad är det karakteristiska polynomet för en linjär n:te ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter?
- Visa att om α är en rot till det karakteristiska polynomet $P(r)$ av multiplicitet m så gäller att $Q(x)e^{\alpha x}$ är en partikulärlösning till $P(D)y = 0$, för $Q(x)$ ett polynom av grad $<$ m.

- Låt det karakteristiska polynomet $P(r)$ ha grad n och låt rötterna vara $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ med multiplicitet $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$ där $m_1 + m_2 + \ldots + m_\ell = n$. Vad är då lösningen till $P(D)y = 0$?

Extrauppgifter

- För vilka värden på konstanyen k har det s.k. *randvärdesproblemet* $y'' - 2y' + ky = 0,\ y(0) = y(\pi) = 0$ någon lösning som ej är identiskt noll? Vad är lösningarna för dessa k?

  Svar: $k = n^2 + 1$ där n är ett heltal; $y(x) = ae^x \sin nx$.

- Bestäm en lösning till ekvationen $y'' - 5y + 6y = 3x^2e^{2x} + 10x \sin x$.

  Svar: $y(x) = -(x^3 + 3x^2 + 6x)e^{2x} + (x+1)\cos x + (x + \frac{2}{5})\sin x$.