EXEMPEL 1: EXAKT LÖSBARA DIFFERENTIALEKVATIONER

Vissa differentialekvationer kan lösas explicit, lösningen
fås mha dsolve. Vi betraktar y'=ysin(x):

```
> dsolve(D(y)(x)=y(x)*sin(x));
```

$$y(x) = _C1\ \mathbf{e}^{(-\cos(x))}$$

Ofta kan det vara praktiskt att först definiera ekvationen och sedan lösa:

```
> ode := D(y)(x)=y(x)*sin(x);
```

$$ode := D(y)(x) = y(x)\sin(x)$$

```
> dsolve(ode);
>
```

$$y(x) = _C1\ \mathbf{e}^{(-\cos(x))}$$

Vill du få lösningen genom en punkt, t.ex. (1,1), så
skriver du diffekv. och BV som en mängd;
man måste då också ange den obekanta funktionen:

```
> sol:=dsolve({ode,y(1)=1},y(x));
```

$$sol := y(x) = \frac{\mathbf{e}^{(-\cos(x))}}{\cosh(\cos(1)) - \sinh(\cos(1))}$$

Här blev uttrycket onödigt komplicerad; det är något
som ofta händer när datorer räknar symboliskt.
Det finns möjlighet att styra hur Maple skall förenkla,
exempelvis kan få ett lite snyggare resultat genom att skriva

```
> convert(sol,expsincos);
```

$$y(x) = \mathbf{e}^{\cos(1)}\ \mathbf{e}^{(-\cos(x))}$$

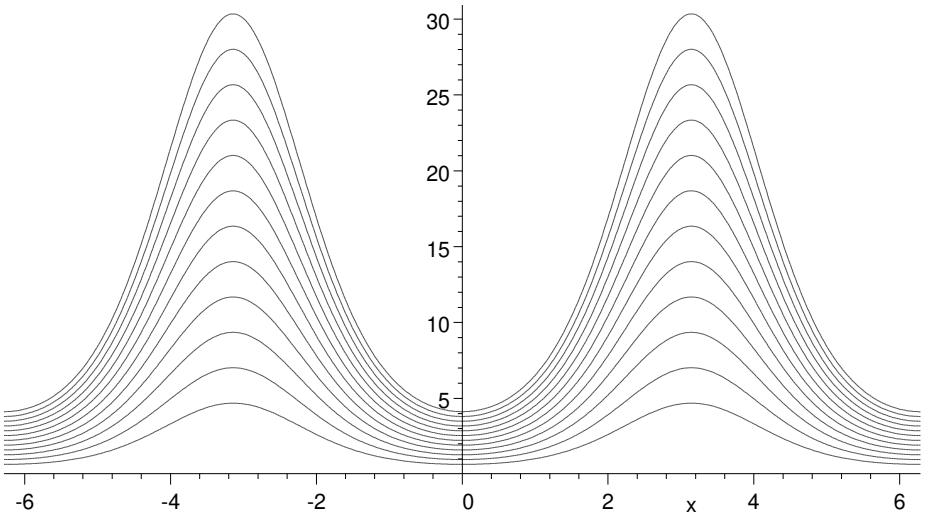
Den erhållna lösningen kan vi nu rita ("plotta högerledet");
`> plot(rhs(sol),x=-2*Pi..2*Pi):` men vi ritar på en gång
kurvskaran för 12 olika startvärden (med "display").
Först måste vi då hämta in plots-paketet,

```
> with(plots):
```

och sedan kan vi skriva

```
> for k from 0 to 11 do
  kurva[k]:=plot(rhs(dsolve({ode,y(1)=1+k/2},y(x))),x=-2*Pi..2*Pi,numpoints=543)
  od:
> display([seq(kurva[k],k=0..11)],title=`lösningsskaran`);
```

lösningsskaran



Ett annat sätt är (och det fungerar även för diffekv som ej kan lösas exakt) att lösa ekvationen numeriskt och rita kurvorna m.h.a. odeplot:

```
> for k from 0 to 11 do sol[k]:=dsolve({ode,y(1)=1+k/2},y(x),type=numeric) od:
> M:=[seq(odeplot(sol[i],[x,y(x)],-6..6,color=red,numpoints=321),i=0..11)]:
```

> display(M): ger samma bild. Men det bästa och roligaste är att du får en "animerad" framställning om du skriver "insequence=true":

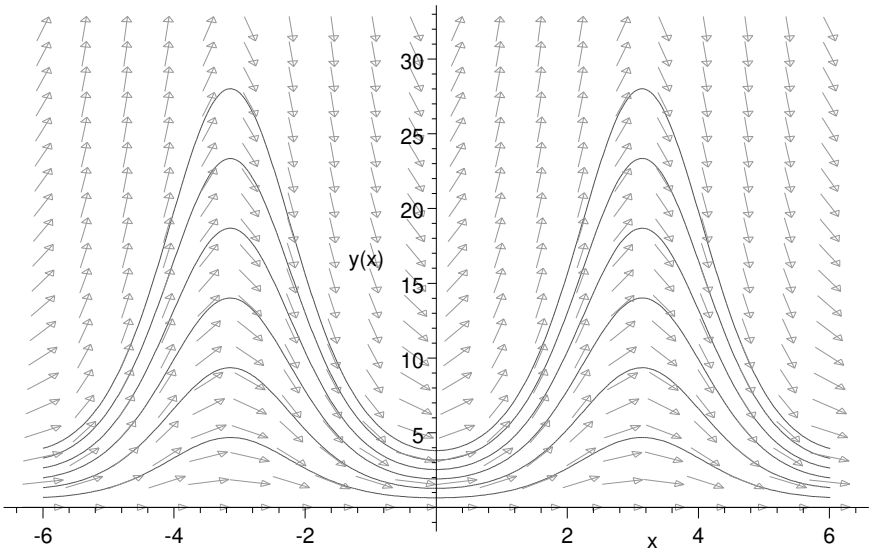
> display(M,insequence=true); klicka på grafen, så kommer det upp en menyrad, där du kan välja hastighet mm; försök!!

Det tredje sättet (kanske det smidigaste?) fås med paketet DEtools. Också det funkar för en ekvation och för system av ekvationer. Dessutom ritas då även riktningsfältet (pilarnas utseende resp färg väljes med "arrow=.." (SMALL är default, NONE för inget riktn.fält) resp "color= .." (red är default. Kurvornas färg väljes med "linecolour=.."). Begynnelsevillkoren skrivs in som en mängd av listor. Vi ritar nu bara 6 kurvor:

```
> for k from 0 to 5 do p[k]:=1+k od: BV:={seq([y(1)=p[k]],k=0..5)}:
> BV;
```

$$\{[y(1)=1],[y(1)=4],[y(1)=5],[y(1)=2],[y(1)=3],[y(1)=6]\}$$

```
> with(DEtools):
> DEplot({ode},{y(x)},x=-6..6,BV,y=0..32,stepsize=0.033,arrows=SLIM,color=green,li
  necolour=red);
```



EXEMPEL 2: DIFFERENTIALEKVATIONER SOM EJ KAN LÖSAS EXAKT

A) LORENZ

Vi löser Lorenz-systemet (kursboken sid. 9.35, 9.36):

```
> syst := diff(x(t),t)=10*(y(t)-x(t)), diff(y(t),t)=15*x(t)-y(t)-x(t)*z(t),
  diff(z(t),t)=x(t)*y(t)-8/3*z(t);
```

$$syst := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x}(t) = 10\,\mathrm{y}(t) - 10\,\mathrm{x}(t),\ \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t) = 15\,\mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t) - \mathrm{x}(t)\,\mathrm{z}(t),\ \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{z}(t) = \mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}(t) - \frac{8}{3}\,\mathrm{z}(t)$$

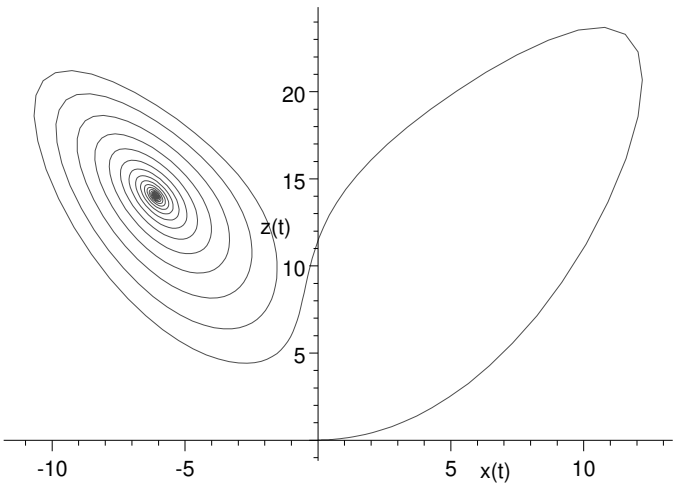
```
> p:=dsolve({syst,x(0)=0.001,y(0)=0,z(0)=0},{x(t),y(t),z(t)},type=numeric):
> with(plots):odeplot(p,[x(t),y(t),z(t)],0..34,numpoints=989,color=red,axes=boxed,
  labels=[x,y,z],title=`Lorenzattraktor`);
```

Samma resultat fås med

```
> DEplot3d({syst},{x(t),y(t),z(t)},t=0..34,{[x(0)=0.001,y(0)=0,z(0)=0]},stepsize=0
  .02,linecolour=red):
```

Vrid nu boxen tills du är nöjd; bokens x-z-porträtt får du genom att titta längs y-axeln. Samma resultat med

```
> DEplot({syst},{x(t),y(t),z(t)},t=0..34,{[x(0)=0.001,y(0)=0,z(0)=0]},stepsize=0.0
  2,scene=[x(t),z(t)],linecolour=red);
```



B) VOLTERRA–LOTKA

Vi löser Volterra-Lotka ekvationen (vi skriver nu för omväxlingens skull med D-operatorn):

```
> sys:=D(x)(t)=x(t)*(1-y(t)),D(y)(t)=y(t)*(x(t)-1);
```

$$sys := \mathrm{D}(x)(t) = \mathrm{x}(t)\,(1 - \mathrm{y}(t)),\ \mathrm{D}(y)(t) = \mathrm{y}(t)\,(\mathrm{x}(t) - 1)$$

Begynnelsevillkor (vi ritar 11 kurvor, utan riktningsfält):

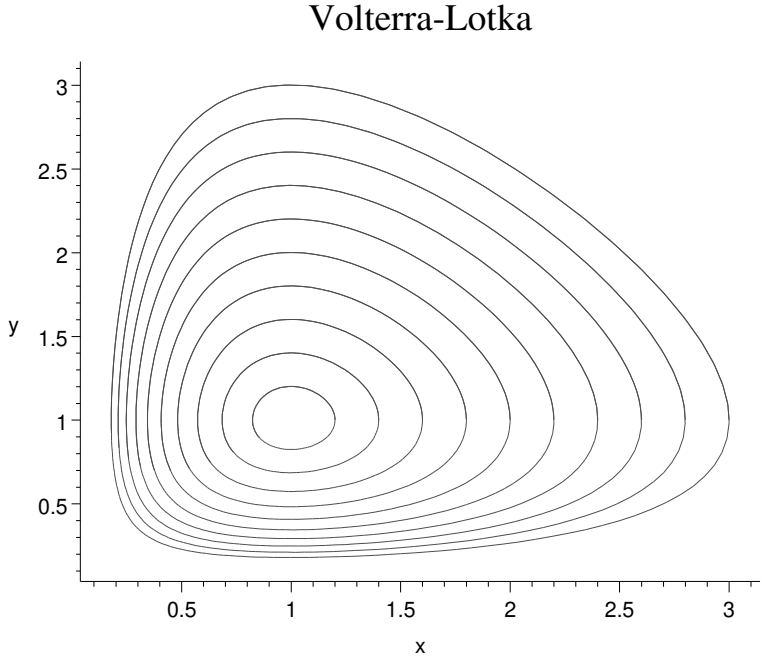
```
> for k from 0 to 10 do v[k]:=[x(0)=3-k/5,y(0)=1] od: BV:={seq(v[i],i=0..10)}:
```

eller kortare:

```
> BV := {seq([x(0)=3-k/5,y(0)=1],k=0..10)}:
```

och kan sedan plotta lösningarna med

```
> DEplot({sys},{x(t),y(t)},t=0..10,BV,stepsize=0.05,arrows=NONE,linecolour=red,tit
  le=`Volterra-Lotka`);
```

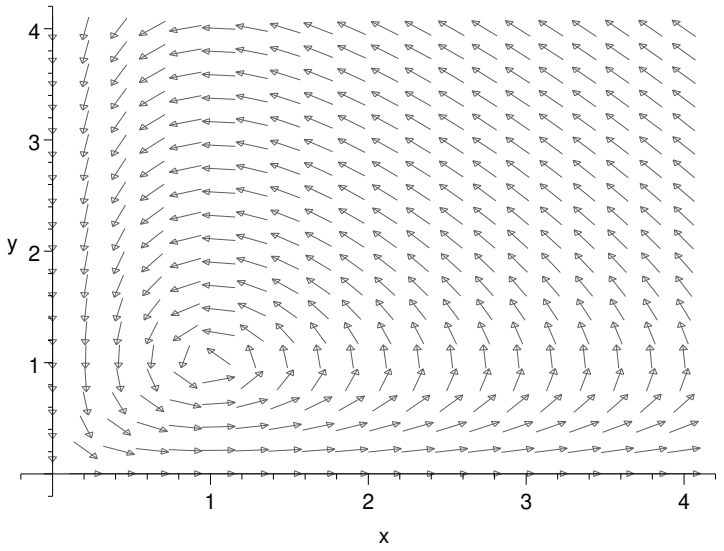


Samma resultat fås med phaseportrait (jag tar med riktningsfältet igen):

```
> phaseportrait({sys},{x(t),y(t)},t=0..10,BV,stepsize=0.05,arrows=SLIM,color=green
  ,linecolour=red,title=`Volterra-Lotka`);
```

Du kan använda dfieldplot (direction-field-plot), om du vill rita endast riktningsfältet:

```
> dfieldplot({sys},[x(t),y(t)],t=0..10,x=0..4,y=0..4,arrows=SLIM,stepsize=0.03);
```



C) VAN DER POL

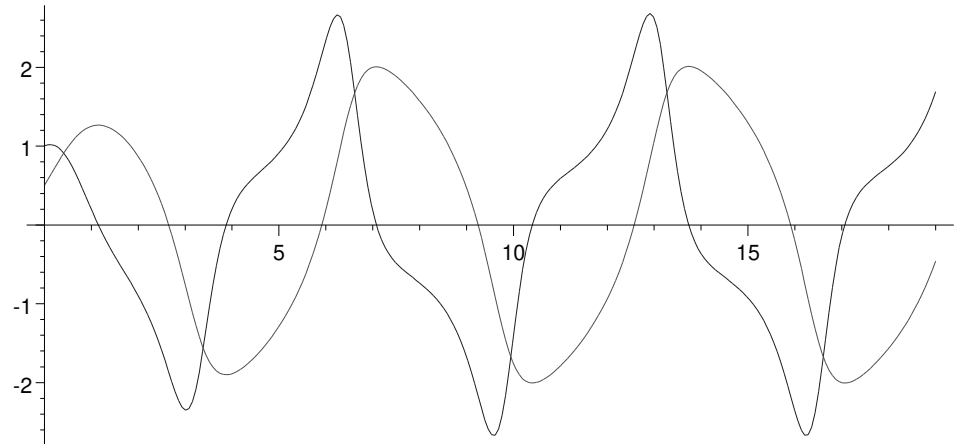
Vi löser van der Pol's ekvation (kursboken, övning 41b, sid 9.34):

```
> vdp:=D(x)(t)=y(t),D(y)(t)=(1-x(t)^2)*y(t)-x(t);
```

$$vdp := \mathrm{D}(x)(t) = \mathrm{y}(t),\ \mathrm{D}(y)(t) = (1 - \mathrm{x}(t)^2)\,\mathrm{y}(t) - \mathrm{x}(t)$$

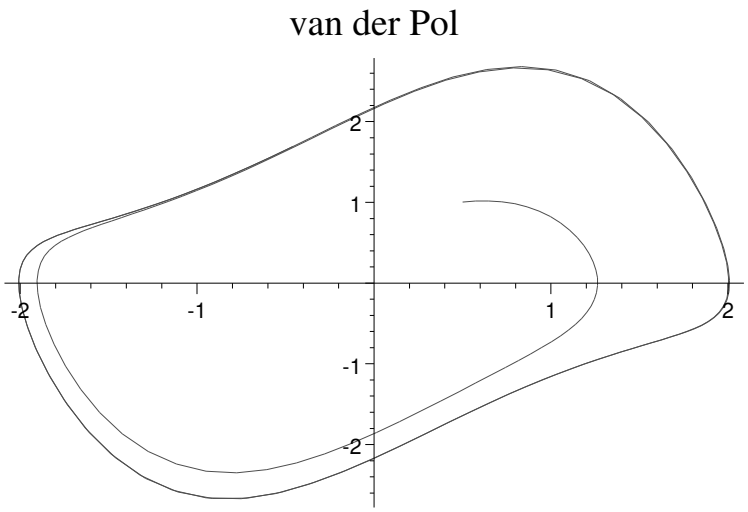
Vi ritar först kurvorna x=x(t) och y=y(t) med dsolve-odeplot:

```
> p:=dsolve({vdp,x(0)=1/2,y(0)=1},{x(t),y(t)},type=numeric):
> p1:=odeplot(p,[t,x(t)],0..19,numpoints=259,color=red):
> p2:=odeplot(p,[t,y(t)],0..19,numpoints=259,color=blue):
> display([p1,p2]);
```



Du kan även rita fasporträttet:

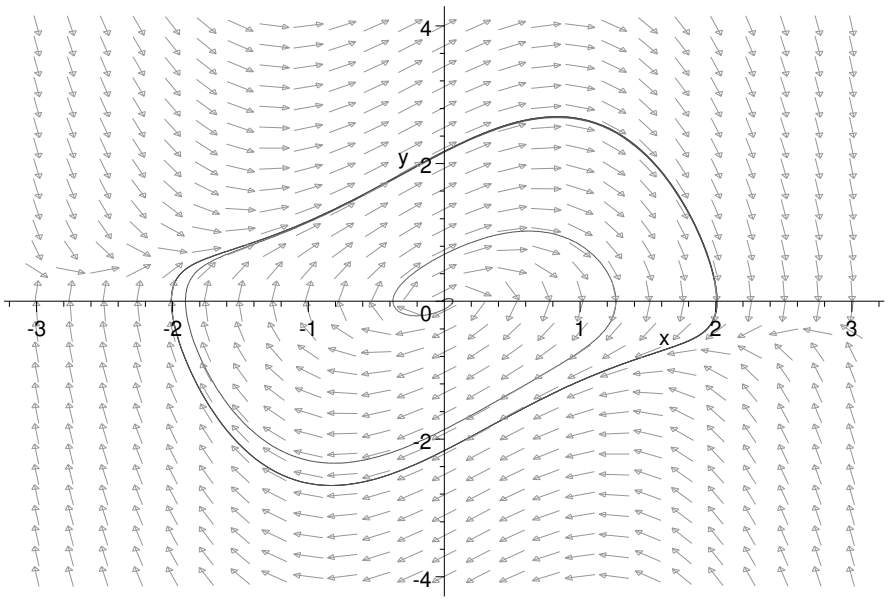
```
> odeplot(p,[x(t),y(t)],0..19,numpoints=259,title=`van der Pol`);
```



Men det gick ju (enklare?) även med DEplot (vi ritar med riktningsfält i ett litet större område och med flera pilar mha dirgrid, default är 20x20):

```
> DEplot({vdp},[x(t),y(t)],t=-10..29,{[x(0)=1/2,y(0)=1]},x=-3..3,y=-4..4,stepsize=
  0.02,dirgrid=[25,28],arrows=SLIM,color=green,linecolour=red,title=`van der
  Pol`);
```

van der Pol



LYCKA TILL
Bernhard och Patrik