## EXEMPEL 3 (primitiv funktion, Riemansumma)

Först beräknar vi en primitiv funktion F till funktionen f och plottar F:

> $f := x \to \dfrac{-6\,x^5 + 4\,x^4 + 18\,x^3 - 17\,x^2 + 9}{x^6 - 4\,x^4 + 3\,x^2}$

Partialbråksuppdelning fås enkelt med

> convert(f(x),parfrac,x);

$$3\,\frac{1}{x^2} - 2\,\frac{1}{x-1} - 4\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{-3+x^2}$$

Ser du roten $\sqrt{3}$ , så kan du skriva

> convert(f(x),parfrac,x,3^(1/2));

$$\frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} - 2\,\frac{1}{x-1} - 4\,\frac{1}{x+1} + 3\,\frac{1}{x^2}$$

Men för att integrera med maple behöver du förstås inte göra det:

> F:=int(f(x),x);

$$F := -3\,\frac{1}{x} - 2\,\ln(x-1) - 4\,\ln(x+1) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{3}\,x\sqrt{3}\right)$$

För att kunna plotta F, skriver vi om arctanh m.h.a. ln ("convert") och ersätter sedan F arctanh med den så erhållna funktionen:

> F1:=subs(arctanh(1/3*x*sqrt(3))=convert(arctanh(1/3*x*sqrt(3)),ln),F);

$$F1 := -3\,\frac{1}{x} - 2\,\ln(x-1) - 4\,\ln(x+1) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\,x\sqrt{3}+1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{3}\,x\sqrt{3}\right)\right)$$

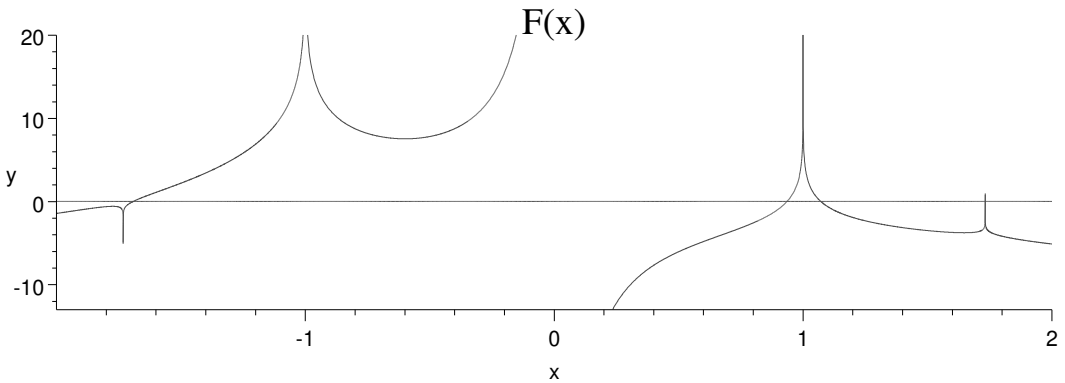
Till sist ersätter vi $\ln(x)$ med $\ln(|x|)$ :

> F2:=simplify(subs(ln=ln@abs,F1));

$$F2 := -\frac{1}{6}\,\frac{18 + 12\,\ln(|x-1|)\,x + 24\,\ln(|x+1|)\,x - x\sqrt{3}\,\ln(|x+\sqrt{3}|) + x\sqrt{3}\,\ln(|x-\sqrt{3}|)}{x}$$

Då kan vi nu plotta över ett godt. intervall. Eftersom f ej är kontinuerlig, så plottar vi med discont=true, då söker maple efter punkter därf har ett språng och bindar inte ihop dessa med sträck::

> plot([F2,0],x=-2..2,y=-13..20,color=red,numpoints=989,discont=true,title='F(x)');



Nu till Riemannsummor: Vi tar som exempel funktionen $2\,\mathrm{arcsinh}(x)\sin(x)+\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$:

Vänster-, mitt-, höger Riemannsummor kan vi rita m.h.a.:

```
> with(student):
> g:=x->2*arcsinh(x)*sin(x)+x/2-Pi/4;
```

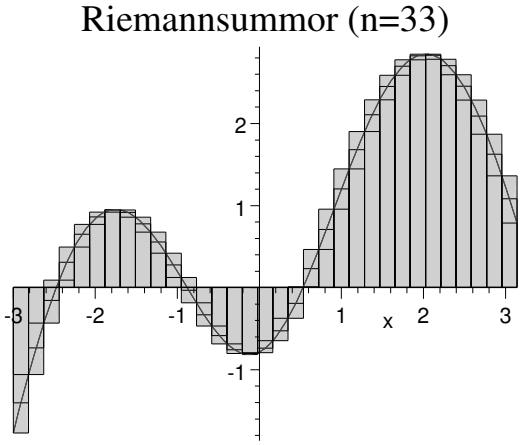
$$g := x \to 2\,\mathrm{arcsinh}(x)\sin(x)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\pi$$

```
> left:=leftbox(g(x),x=-3..Pi,33,color=red):
> mitt:=middlebox(g(x),x=-3..Pi,33,color=red):
> right:=rightbox(g(x),x=-3..Pi,33,color=red):
```

Rita nu en efter en, eller alla i samma plot. Ladda in plots-paketet, då kan du rita

flera plots i samma figur m.h.a. display (skriv in dem som en lista):

```
> with(plots):
> display([left,mitt,right],title='Riemannsummor (n=33)');
```




Summorna kan förstås beräknas exakt:

```
> middlesum(g(x),x=-3..Pi,33);
```

$$\left(\frac{1}{33}\pi+\frac{1}{11}\right)\left(\sum_{i=0}^{32}\left(2\,\mathrm{arcsinh}\left(-3+\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{33}\pi+\frac{1}{11}\right)\right)\sin\left(-3+\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{33}\pi+\frac{1}{11}\right)\right)-\frac{3}{2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{33}\pi+\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{4}\pi\right)\right)$$

men vi vill ju ett närmevärde:

```
> evalf(leftsum(g(x),x=-3..Pi,33));evalf(middlesum(g(x),x=-3..Pi,33));evalf(rightsum(g(x),x=-3..Pi,33));
```

$$4.500496250$$

4.769841900

4.976480469

Jämför med

```
> evalf(int(g(x),x=-3..Pi));
```

4.759387315

LYCKA TILL

Bernhard