Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2000-08-14, kl 14.15-18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: , tel. 0740-459022
OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

1. Låt $f(x,y) = sinh(arctan(x-y))$.
a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ origo. (4p)
b) Beräkna riktningsderivatan av f i origo i riktningen $(2,-1)$. (2p)

2. Beräkna längden av kurvan $C: t \to \left(t+e^t, t-e^t, 4\sqrt{e^t}\right),\ -1 \xrightarrow{t} 1$. (4p)

3. Vilka värden antar $\dfrac{x+3y}{1+x^2+3y^2}$ $(x,y \in \mathbb{R})$? (6p)

4. Låt $f(x,y) = 1 + \dfrac{sinh\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{cosh\left(x^2+y^2-1\right)}{cosh\,3}$ och $D: x^2+y^2 \le 4$.
Beräkna den generaliserade dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ (om den existerar). (5p)

5. Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F} = \left(\dfrac{xy}{(x+y)^3}, \dfrac{-x^2}{(x+y)^3}\right)$ uträttar då en partikel förflyttas från $(0,1)$ till $(1,0)$ längs cirkelbågen $C: x^2+y^2=1$ (medurs). (6p)

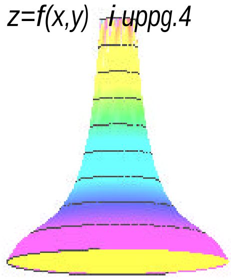
6. Beräkna $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{sin\,x} - \frac{sin\,x}{x}\right)$. (4p)

7. Visa att det i en omgivning till $(0,0,0)$ finns en funktion $z = z(x,y)$ som satisfierar ekvationen $x^2 + y^2 + x\,sin\,z - z^3 - z = 0$ (2p). Visa även att $(0,0)$ är en stationär punkt till denna funktion $z(x,y)$ (2p) och bestäm dess typ (4p). (8p)

8. **a)** Definiera inre punkt och randpunkt till en mängd $D \subset \mathbb{R}^n$. (3p)
b) Formulera och bevisa kedjeregeln för en funktion $f(x(t), y(t))$. (6p)
c) Definiera konservativt kraftfält. (2p)

BB

z=f(x,y) i uppg.4



Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2000-03-06, kl 14.15-18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Jacob Hultén, tel. 0740-459022
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat !

1. Låt $f(x,y) = ln\sqrt{1+x^2+y^2} - arctan(xy)$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $\left(1,1, ln\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}\right)$. (4p)

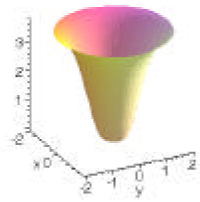
b) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(1,1)$ i riktningen $(1,1)$. (2p)

c) Vilka värden antar f i området $x^2 + y^2 \leq 8$?

[Några värden: $\ln 5 \approx 1.61$, $\ln 3 \approx 1.10$, $\arctan 2 \approx 1.11$, $\arctan 4 \approx 1.33$] (6p)

2. Beräkna längden av kurvan $C : t \mapsto (cosh\, t, sinh\, t, t)$, $-1 \xrightarrow{t} 1$. (3p)

3. En vas, som har formen $z = \dfrac{4\left(x^2+y^2\right)^2}{1+\left(x^2+y^2\right)^2}$, fylls $\frac{64}{17}\,cm$ högt med vatten. Hur mycket vatten finns i vasen? (5p)



4. Låt $D = \left\{(x,y) : 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}\right\}$ och $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$.

a) Visa att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt bijektiv i D. (2p)

b) Lös problemet $sin(y)\, f'_x + cos(y)\, f'_y = e^x\, cot(y)$, $(x,y) \in D$ [ledn: använd $u,v\ldots$]. (4p)

5. Låt $\mathbb{F} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}, \dfrac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right)$.

a) Visa att $\mathbb{F}$ är konservativt i $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -y < x < y\right\}$. (2p)

b) Beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas från $(-1,2)$ till $(1,2)$ längs cirkelbågen $C : x^2 + (y-3)^2 = 2$ (medurs). (4p)

6. Låt $f(x,y) = \sqrt{1+xy} - cosh\left(x^2-y^2\right) - ln\left(1+x^2+y^2\right)$.

a) Maclaurinutveckla f t.o.m. ordningen 4. (5p)

b) Visa att $(0,0)$ är en stationär punkt till f och bestäm dess typ. (3p)

7. a) Definiera randpunkt till en mängd $D \subset \mathbb{R}^n$. (2p)

b) Visa att om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i (a,b) och $grad\, f(a,b) \neq (0,0)$ så är $grad\, f(a,b)$ vinkelrät mot nivåkurvan $f(x,y) = f(a,b)$. (4p)

c) Visa att om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i (a,b) så är f kontinuerlig i (a,b). (4p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2000-01-15, kl 8.45-12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Erik Alapää, tel. 0740-459022
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat!

---

1. Låt $f(x,y) = 1 + \sinh\left(\sin\left(x^2+y^2\right)\right) - \cosh(\cos(xy))$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right)$. (4p)

b) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ i riktningen $(1,1)$. (2p)

2. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$ och avgör deras typ. (6p)

3. Låt $D = \{(x,y) : 0 < x < y\}$ och $u = 1 + x^2y^2$, $v = x + y$.

a) Visa att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt injektiv i D. (2p)

b) Lös problemet $xf'_x - yf'_y = x^2 - y^2$, $f(x,3x) = 1 + 8x^2 + 9x^4$, $(x,y) \in D$. (6p)

4. Låt $\mathbb{F}_1 = \left(\dfrac{xy^2 - x^2y^3}{x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1}, \dfrac{x^2y - x^3y^2}{x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1}\right)$, $\mathbb{F}_2 = \left(y^2, x^2\right)$.

a) Visa att $\mathbb{F}_1$ är konservativt i $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, -\frac{1}{x} < y\right\}$. (2p)

b) Beräkna det arbete som $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$ uträttar då en partikel förflyttas längs ellipsbågen $C : \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}\cos\varphi \\ y = \sqrt{2}\sin\varphi \end{cases}, 0 \xrightarrow{\varphi} \pi$. (6p)

5. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna

$y = 1$, $y = 4$, $y = 2x$, $y = 2x + 1$, $z = 0$ och $z = \dfrac{\ln y}{1 + (2x - y)^2}$. (6p)

6. Funktionen f definieras genom $f(0) = 1$ och $f(x) = \dfrac{\arctan x}{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$ för $0 < |x| < 1$.

Visa att funktionen är deriverbar i 0. (6p)

7. a) Definiera inre punkt, öppen mängd och kompakt mängd. (3p)

b) Visa att om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är deriverbar i (a,b) och antar i (a,b) ett lokalt extremvärde så är (a,b) en stationär punkt till f. (4p)

c) Definiera båglängdselementet av en kurva. (3p)

Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 1999-03-08, kl 14.15-18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon:
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat!

---

1. Låt $F(x,y,z) = cosh(xz - yz) + sinh(x + y - z)$ och $P = (1,1,2)$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z) = 1$ i punkten P. (4p)

b) Beräkna riktningsderivatan av F i punkten P i riktningen $\vec{v} = (2,1,2)$. (3p)

c) Visa att nivåytan $F(x,y,z) = 1$ lokalt i P är en funktionsyta $z = f(x,y)$. (1p)

2. Beräkna längden av kurvan $C : y^2 = x^3$, $0 \le x \le 1$ ["Neil's parabel"]. (4p)

3. Bestäm för $0 < |y| < x < 1$ en funktion $z(x,y)$ som är 0 på Neil's parabel (se uppg.2) och satisfierar $x^3 z'_x + x^2 y z'_y = y^2$

[ledn: inför de nya variablerna $u = x^2 - y^2$, $v = x^2 y^{-2}$] . (6p)

4. Betrakta kroppen $K = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 2500,\ 0 \le z \le 15 + \frac{x^2}{500}\right\}$.

a) Beräkna K:s volym. (4p)

b) Klockan 12 en vacker vårdag var temperaturen i en punkt (x,y,z) på K:s tak $T(x,y,z) = 10^{-3}\left(y^2 - xy + 500z\right)$ [^{o}Celsius].
Mellan vilka värden varierade temperaturen på K:s tak då ? (6p)
[K:s tak är ytan $\left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 2500,\ z = 15 + \frac{x^2}{500}\right\}$]

5. Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F}(x,y,z) = (y - z, z - x, -xy)$ uträttar

då en partikel förflyttas längs kurvan $C : \begin{cases} x = 50\cos t \\ y = 50\sin t \\ z = 15 + 5\cos^2 t \end{cases}$ $, -ð \xrightarrow{t} ð$. (5p)

6. Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^3 i $D : x^2 + y^2 < 1$

och funktionen $$\frac{f(x,y) - 1 + x^2 + 4xy + 7y^2}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}}$$ är begränsad i D.

Visa att origo är en stationär punkt till f och avgör dess karaktär. (5p)

7. **a)** Vad menas med att en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i (a,b)? (2p)

b) Definiera konservativt kraftfält. (2p)

c) Formulera Taylors formel för en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (2p)

d) Formulera och bevisa Greens sats. (6p)

Kroppen K (uppgift 4, 5):

Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 1999-01-17, kl 8.45-12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon:
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat!

==

1. En kulle representeras av grafen $z = 9 - x^2 + 3y - y^2$, där z är kullens höjd. I vilken riktning (i *xy*-planet) är stigningen brantast i punkten $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{21}{2}\right)$? Beräkna stigningshastigheten och stigningsvinkeln i punkten P i denna riktning. (6p)

2. Betrakta kraftfältet $\mathbb{F}(x,y) = \left(x^2 + y^2 + x\,ln\left(1+y^2\right),\ \dfrac{x^2 y}{1+y^2} \right)$ och kurvorna

$C_1 : y = \frac{1}{2}x^2 - 2,\ -2 \xrightarrow{x} 2$ och $C_2 : y = cos\left(\frac{\pi}{4}x\right),\ 2 \xrightarrow{x} -2$.

a) Är $\mathbb{F}$ konservativt? (2p)

b) Beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan $C = C_1 + C_2$. (5p)

c) Beräkna längden av kurvan C_1. (4p)

3. Lös problemet

$$x^2 z'_x + y^2 z'_y = x + y,\ z(x,2x) = 2\,ln\,x + \frac{1}{2x},\ (x,y) \in D = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\},$$

genom att införa de nya variablerna $u = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\ v = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$.

Visa även att u, v duger som nya variabler i D. (7p)

4. Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\,dxdy$, där $D = \{(x,y) : x < y < -x\}$. (5p)

5. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x,y) = \dfrac{1+2x+2y}{1+x^2+y^2}$ $\left(D_f = \mathbb{R}^2\right)$.

Motivera väl! (6p)

6. Låt $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sinh\,x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Visa att f är två gånger deriverbar i origo och beräkna $f''(0)$.

Ledn: Beräkna först $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$, sedan $f''(0)$, genom Mclaurinutveckling. (6p)

7. **a)** Definiera inre punkt, randpunkt och sluten mängd i $\mathbb{R}^n$. (3p)

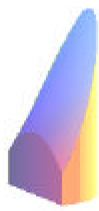
b) Formulera implicita funktionssatsen. (2p)

c) Visa att gradienten till en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i en punkt (a,b) är vinkelrät mot nivåkurvan $f(x,y) = f(a,b)$ om f är C^1. (4p)

Svar (gamla del C-tentor)

00-08-14: **1a)** $x-y-z=0$ **b)** $\frac{3}{\sqrt{5}}$ **2)** $2\sqrt{2}(1+\sinh 1)$ **3)** $[-1,1]$ **4)** $2\pi\left(1+\cosh 2-\frac{\sinh 3+\sinh 1}{2\cosh 3}\right)$ $\left(=\frac{e^8+2e^2+1}{e^6-e^4+e^2}\pi\right)$ **5)** $\frac{1}{2}$ **6)** $\frac{1}{3}$ **7)** lokal minimipunkt
00-03-16: **1a)** $x+y+6z=2+3\ln 3-\frac{3\pi}{2}$ **b)** $\frac{-\sqrt{2}}{6}$ **c)** $\left[\ln\sqrt{5}-\arctan 2, \ln 3+\arctan 4\right]$ **5)** $\frac{\pi}{3}$ **2)** $2\sqrt{2}\sinh 1$ **3)** $2\pi^2\ cm^3$ **4b)** $e^x\cos y(x+\ln(\sin y))+g\left(e^x\cos y\right)$ **6)** lok. maximipkt.
20-01-15: **1a)** $\sqrt{2\pi}\,x+\sqrt{2\pi}\,y+z=2\pi$ **b)** $-2\sqrt{\pi}$ **2)** (0,0) sadelpunkt, (3,3) lok. minimipunkt **3b)** $f(x,y)=1+xy+x^2y^2+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ **4b)** $2\sqrt{6}\left(\pi-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ **5)** $\ln 2-\frac{3\pi}{8}$
99-03-08: **1a)** $z=x+y$ **b)** $\frac{1}{3}$ **2)** $\frac{2}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)$ **3)** $z(x,y)=\frac{y^2}{x^2}\ln\frac{x^3}{y^2}$ **4a)** 40625π **b)** $[\,7.5^o, 11.25^o\,]$ **5)** 1250π **6)** lok. maximipunkt
99-01-17: **1)** $\left(-\sqrt{2},1\right)$, 60^o **2a)** nej **b)** $\frac{98}{15}$ **c)** $2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ **3)** $\ln(xy)+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\ln 2$ **4)** $\frac{\pi}{4}$ **5)** $[-1,2]$ **6)** $f''(0)=\frac{1}{3}$
01-01-13: **1)** $3\sqrt{3}x+3\sqrt{3}y+4z=\left(1+\sqrt{3}\right)\pi$ **2)** $\frac{1}{2}\sinh^2 x\sinh y(\sinh x+\sinh y)$ **3)** $\frac{\pi}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **4)** $V_f=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ **5b)** xy xy^2 x^2y $\frac{1}{2}xy^3$ $\frac{1}{2}x^2y^2$ $\frac{1}{}x^3y$ $\arctan e^2-\arctan 2$ **b)** $1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Tentan 01-01-13 fick du med vp3, här får du resterande uppgifterna:



3. Beräkna volymen av cylindern

$$\left\{(x,y,z):(x-1)^2+(y-1)^2\le 1,\ x+y\ge 2, 0\le z\le xy\right\}.$$

(6p)

6. Betrakta kurvan C: $\boldsymbol{r}(t)=\left(\cos^4 t,\sin^4 t\right)$, $0\xrightarrow{t}\frac{\pi}{2}$.

a) Beräkna det arbete som kraftfältet

$$\left(\frac{x}{1+\left(x^2+e^{2y}\right)^2},\frac{e^{2y}}{1+\left(x^2+e^{2y}\right)^2}\right)$$

uträttar då en partikel förflyttas längs C. (6p)

Lycka till

Bernhard