VECKANS PROBLEM

PROBLEM 2 (lösningen skall vara klar v6, diskuteras i rö v7)

a) Låt $F(x,y,z)=\sin\left(ye^{x}\right)+e^{x+2y+4z}$.

- I vilken riktning avtar F snabbast i origo?
- Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan Y: $F(x,y,z)=1$ i origo, först direkt (med F), sedan genom att beskriva Y som en funktionsyta $z=f(x,y)$ nära origo.

b) Bestäm en funktion $z(x,y)$ som satisfierar $xz'_x-yz'_y=2$ och $z(x,x)=x^2$ för $(x,y)\in D=\{(x,y):x>0,y>0\}$

(ledn: inför de nya variablerna $u=\arctan(xy),\ v=\frac{x}{y}$).

c) Funktionen f definieras genom $f(0)=1$ och $f(x)=\dfrac{\arctan x}{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$ för $0<|x|<1$.

Visa att funktionen är deriverbar i 0.

Lösningsförslag till VP1

a) $A=\int_C \mathbf{F}\bullet d\boldsymbol{r}=\int_{-2}^{2}\mathbf{F}\bullet\boldsymbol{r}'\,dt=\int_{-2}^{2}\left(t(t^2-4)+t,\sin t+\sinh(t^2-4)+\cos(t),t(t^2-4)t\right)\bullet(1,2t,1)\,dt=$

$$=\int_{-2}^{2}\left(t(t^2-4)+t+\left(\sin t+\sinh(t^2-4)+\cos t\right)2t+t^2(t^2-4)\right)dt=[\text{utnyttja } \textit{jämn-udda} \text{ !!}]=$$

$$=2\int_0^2\left(2t\sin t+t^4-4t^2\right)dt=2\left[2(\sin t-t\cos t)+\tfrac{1}{5}t^5-\tfrac{4}{3}t^3\right]_0^2=2\left(2\sin 2-4\cos 2+\tfrac{32}{15}(3-5)\right).$$

$$L=\int_C ds=\int_{-2}^{2}|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt=\int_{-2}^{2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\int_{-2}^{2}\sqrt{1+(2t)^2+1}\,dt=2\int_0^2\sqrt{2\left(1+2t^2\right)}\,dt=$$

$$=\left[\sqrt{2}t=u\right]=2\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+u^2}\,du=[\text{se sid } 4]=\left[u\sqrt{1+u^2}+\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^{2\sqrt{2}}=6\sqrt{2}+\ln\left(2\sqrt{2}+3\right).$$

Arbetet är alltså $\underline{\tfrac{4}{15}(15\sin 2-30\cos 2-32)}$ och längden $\underline{6\sqrt{2}+\ln\left(2\sqrt{2}+3\right)}$.

b) f är ej kontinuerlig i origo, ty t.ex. går $f(x,x)$ ej mot $f(0,0)=0$ då x går mot 0:

$f(x,x)=\dfrac{\sin\left(x^3\right)}{x^3}\to 1$ då $x\to 0$. Därmed är även visat att f ej är differentierbar i origo.

Men f är deriverbar (även) i origo, ty $\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\dfrac{0-0}{h}=0\to 0$ då $h\to 0$ och

$\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\dfrac{0-0}{k}=0\to 0$ då $k\to 0$ (dvs $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$!!).

REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del C för E1, 2000

Moment 3: taylorutveckling

1. Vad är Taylorpoynomet (-utvecklingen) av en reellvärd funktion (i en eller flera variabler)? Kan du härleda ”formeln”? Kan du Taylorutvecklingen för de elementära funktionerna? Binomialsatsen?

2. Kan du formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats för två funktioner?

3. Kan du L’Hospitals regler?

EXTRAUPPGIFT

a) Ange Maclaurinutvecklingen till $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x^2)}$. Ta med termer t.o.m. 8:de graden. Gör tre lösningar: (1) med ansättningen $f(x) = \sum_{k=0}^{8} a_k x^k + \cdots$,

(2) med $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots$ och (3) med "lång division".

b) Visa att funktionen $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ är C^1 i $|x| < \pi$.

<u>**svar**:</u> **a)** $f(x) = 1 + \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{5x^8}{24} + x^8 o(1)$ **b)** Visa att $f'(0) = \frac{1}{12}$ och att f' är kontinuerlig!

Anm:
Integralen för längden i 1a) bör du kunna, repetera del B; antingen du börjar med partiell integration:

$$\int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx = x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \int \tfrac{1}{2} x (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} 2x dx = x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \int \tfrac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

osv., eller (fiffigast!) du substituerar $x = \sinh t$:

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \cosh t \cosh t\, dt = \tfrac{1}{2}\left(t + \tfrac{1}{2}\sinh 2t\right) = \tfrac{1}{2}\left(t + \sinh t \cosh t\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sinh^{-1} x + x\sqrt{1+x^2}\right),$$ kom ihåg

att $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ och $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$!

Kurvan C i uppgift 1a):