

VECKANS PROBLEM

PROBLEM 3 (lösningen skall vara klar v7)

- a) Låt $u = \arctan(xy)$, $v = \frac{x}{y}$ för $(x, y) \in D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ (vp2c).

Visa att tillordningen $(x, y) \mapsto (u, v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i D .

- b) Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y) = \ln|2x - 1| + \ln|y| + xy - x$ och deras karaktär.

- c) Bestäm värdemängden till funktionen $f(x, y) = \frac{1 + 2x + 2y}{1 + x^2 + y^2}$, $D_f = \mathbb{R}^2$.

Lösningsförslag till VP2

- a) Svaren fås m.h.a. gradientvektorn:

$\text{grad}F = (ye^x \cos(ye^x) + e^{x+2y+4z}, e^x \cos(ye^x) + 2e^{x+2y+4z}, 4e^{x+2y+4z})$, alltså är $\text{grad}F(0,0,0) = (1,3,4)$ och vi får: F avtar snabbast i riktningen $-(1,3,4)$ och tangentplanet har ekv. $\text{grad}F(0,0,0) \cdot (x-0, y-0, z-0) = 0$, alltså $x + 3y + 4z = 0$.

Vi kan också lokalt kring origo lösa ut z :

$e^{x+2y+4z} = 1 - \sin(ye^x) \Rightarrow z = \frac{1}{4}(\ln(1 - \sin(ye^x)) - x - 2y) = f(x, y)$ och tangentplanet fås nu som $z = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y$ där $\text{grad}f = \frac{1}{4}\left(\frac{-ye^x \cos(ye^x)}{1 - \sin(ye^x)} - 1, \frac{-e^x \cos(ye^x)}{1 - \sin(ye^x)} - 2\right)$, alltså $\text{grad}f(0,0) = \frac{-1}{4}(1,3)$ och det ger samma svar s.o..

- b) $xz'_x - yz'_y = x(z'_u u'_x + z'_v v'_x) - y(z'_u u'_y + z'_v v'_y) = \frac{xy-yx}{1+x^2y^2} z'_u + 2\frac{x}{y} z'_v = 2vz'_v = 2$, denna differentialekvation har den allmänna lösningen $z(u, v) = \ln v + g(u)$ (g en godt. C^1 -funkt.), dvs. (back to x, y): $z(x, y) = \ln \frac{x}{y} + g(\arctan(xy)) = \ln x - \ln y + f(xy)$ (f en godt. C^1 -funkt.). Nu skall $z(x, x) = f(x^2) = x^2$, det ger $f(t) = t$ och svaret $z(x, y) = \ln x - \ln y + xy$.

- c) Anm: Nämnaren är $\tanh^{-1}$ och har den (enkla) Maclaurinutvecklingen

$$\frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 o(1)\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 o(1)\right)\right) = x + \frac{x^3}{3} + x^3 o(1).$$

Vi skall undersöka om $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\arctan x - \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))}{x \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))}$ har ett

gränsvärde då x går mot 0. Vi Maclaurinutvecklar, först nämnaren, bara första termen, sedan täljaren t.o.m. samma grad:

$$\frac{\arctan x - \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))}{x \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))} = \frac{x + x^2 o(1) - (x + x^2 o(1))}{x^2 + x^2 o(1)} = \frac{x^2 o(1)}{x^2 + x^2 o(1)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

det visar att f är deriverbar i 0 med $f'(0) = 0$.

REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del C för E1, 2000

Moment 4: max-min-problem, funktionalmatris, funktionaldeterminant

1. Vad är en stationär punkt?
Kan du visa att inre extrempunkter är stationära (för deriverbara funktioner)?
Gäller omvändningen?
2. Vad är en (positivt definit resp. negativt definit resp. indefinit) kvadratisk form?
Hur kan man bestämma karaktären av stationära punkter?
3. Vad är funktionalmatrisen och funktionaldeterminanten av ett fält? Vad ger funktionaldeterminanten? Vad är differentialen till ett C^1 -fält (sid. 114)?
4. Vad är en (lokalt) bijektiv funktion? Kan du inversa och implicita funktionssatsen?
5. Hur hittar man största/minsta värde av en funktion (ev. under bivillkor)?

EXTRAUPPGIFTER

1. Visa att för positiva reella tal x, y, z gäller: $xyz = a^3 \Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z) \geq (1+a)^3$.
2. Ett plåtkärl har formen av ett rätblock. Plåten i botenytan kostar 2 öre/cm² och i de övriga fem sidorna 1 öre/cm². Vilka mått skall kärlet ha för att rymma maximal volym, då den totala plåtkostnaden uppgår till 36 öre?

svar: b) $2\text{cm} \times 2\text{cm} \times 3\text{cm}$

ANM.: I linjär algebra visas att för en kvadratisk form $Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ gäller:

$$Q \text{ är } \begin{cases} \text{positivt definit} \\ \text{negativt definit} \\ \text{indefinit} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \begin{cases} > 0 \text{ och } A > 0 \\ > 0 \text{ och } A < 0 \\ < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{egenvärdena till } \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \text{ är } \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ > 0 \wedge < 0 \end{cases}$$

[egenvärdena till $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ är rötterna till polynomet $\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix}$.
vp3 c)

