VECKANS PROBLEM

PROBLEM 4 (lösningen skall vara klar on/to 22/23 februari)

a) Beräkna volymen av den kropp som begränsas nedåt av konen $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ och uppåt av sfären $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$ ("glassmängden").

b) Beräkna $\iint_D \frac{e^{2x}}{y\left(e^{2x}+1\right)}\,dxdy$, då D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = 2e^{-x}$, $y = 3e^{-x}$, $y = \cosh x$ och $2y = \cosh x$.

Lösningsförslag till VP3

a) $\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{y}{1+x^2y^2} & \frac{x}{1+x^2y^2} \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{-x}{y\left(1+x^2y^2\right)} \neq 0$ i D, inversa funktionssatsen ger påstående.

b) $\begin{cases} f'_x = \frac{2}{2x-1} + y - 1 = 0 & \Rightarrow \frac{2}{2x-1} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{3-2x}{2x-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) = 0 \\ f'_y = \frac{1}{y} + x = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{x} & \Uparrow \end{cases}$,

det ger de stationära punkterna (1,-1) och (-½ ,2). Deras typ avgörs (ev.) m.h.a. den kvadratiska formen $Q(h,k) = f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2$: $f''_{xx} = \frac{-4}{(2x-1)^2}$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = \frac{-1}{y^2}$;

i punkten (1,-1): $Q(h,k) = -4h^2 + 2hk - k^2 = -\left((k-h)^2 + 3k^2\right)$ är negativt definit,

i punkten (-½ ,2): $Q(h,k) = -h^2 + 2hk - \frac{1}{4}k^2 = -(h-k)^2 + \frac{3}{4}k^2$ är indefinit,

därmed är svaret: <u>(1,-1) är lokal maximipunkt, (-½ ,2) är sadelpunkt</u>

c) $\begin{cases} f'_x = \frac{2\left(1+x^2+y^2\right) - 2x(1+2x+2y)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} = 0 \\ f'_y = \frac{2\left(1+x^2+y^2\right) - 2y(1+2x+2y)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = y$ (subtrahera!), och det ger de stationära punkterna

$(-1,-1)$ och $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ med $f(-1,-1) = -1$ och $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2$. Om vi räknar med polära koordinater så ser vi att $0 \le |f(x,y)| = \frac{|1 + 2r\cos\varphi + 2r\sin\varphi|}{1+r^2} < \frac{1+4r}{r^2} < \frac{5}{r} \le 1$ då $r \ge 5$.

På den kompakta cirkelskivan $\Omega : x^2 + y^2 \le 25$ (t.ex.) antar den kontinuerliga funktionen f ett största och ett minsta värde (sats 4, sid. 33) och måste göra det i det inre av Ω (ty på randen är $|f| < 1$), alltså i en stationär punkt (ty f är C^1), men de enda möjliga punkterna är $(-1,-1)$ och $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (som vi visat ovan), alltså är -1 det minsta värde som f antar och 2 det största värde som f antar. Eftersom $\mathbb{R}^2$ är bågvis sammanhängande och f kontinuerlig så antar f också alla värden mellan -1 och 2 (somv, sats 6 sid. 34). Svaret är därmed <u>$V_f = [-1, 2]$</u>.

REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del C för E1, 2000

Moment 5: dubbelintegral

1. Kan du definiera/beräkna dubbelintegral? Vad ger den?

2. Hur görs variabelbyte? Hur definieras/beräknas generaliserad dubbelintegral?

EXTRAUPPGIFTER

1. Kroppen K begränsas av xy-planet och ytan $z = 20 - 2x^2 - 3y^2$.
Genom K borras ett cylindriskt hål med z-axeln som borraxel och radien R.
Bestäm R så att den återstående kroppen har hälften så stor volym som K
(bortborrad massa = kvarvarande massa).

2. Beräkna $\iint_D e^{xy-x^2-y^2}\,dxdy$ då D är första kvadranten i xy-planet.

svar: **1)** $R = \sqrt{8 - \sqrt{64 - \frac{80}{\sqrt{6}}}}$ **2)** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Extrauppgift 1 (olika sätt att rita i maple):