# VECKANS PROBLEM

## PROBLEM 5 (lösningen skall vara klar v9)

**a)** Låt $\mathbb{F} = \left( \dfrac{4x+2y^2-1}{1+\left(2x+y^2\right)^2}, \dfrac{4xy+2y^3-y}{1+\left(2x+y^2\right)^2} \right)$.

Visa att $\mathbb{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ och beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs spiralen $C: \begin{cases} x = \sqrt{e^{-t}}\cos t \\ y = \sqrt{e^{-t}}\sin t \end{cases}, 0 \xrightarrow{t} 3ð$.

**b)** Beräkna kurvintegralen $\int_C \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\,dx - \arctan\frac{y}{x}\,dy$ där $C$ är den positivt orienterade randen till det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=x$, $y=\sqrt{3}\,x$.

## Lösningsförslag till VP4

**a)** Beräkna först snittet mellan konen och sfären, antingen genom att sätta in $x^2+y^2=\frac{1}{4}z^2$ från konen i sfären, det ger $\frac{1}{4}z^2+(z-1)^2=2 \Rightarrow z^2-\frac{8}{5}z=\frac{4}{5} \Rightarrow \cdots \Rightarrow z=2$, eller genom att sätta in $z=2\sqrt{x^2+y^2}=2r$ från konen i sfären, det ger $r^2+(2r-1)^2=2 \Rightarrow r^2-\frac{4}{5}r=\frac{1}{5}$ $\Rightarrow \cdots \Rightarrow r=1$. Kroppen $K=\left\{(x,y,z):(x,y)\in D,\ 2\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1+\sqrt{2-x^2-y^2}\right\}$, med $D: x^2+y^2\le 1$, har då volymen $m(K)=\iint_D \left(1+\sqrt{2-x^2-y^2}\right)dx\,dy-\iint_D\left(2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy=$

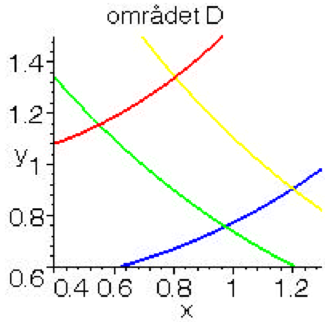
$$= [\text{pol. koord.}] = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1+\sqrt{2-r^2}-2r\right)r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^1\left(r+r\sqrt{2-r^2}-2r^2\right)dr =$$

$$= \pi\left[r^2-\tfrac{2}{3}\left(2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{4}{3}r^3\right]_0^1 = \underline{\tfrac{\pi}{3}\left(4\sqrt{2}-3\right)}.$$

**b)** Gör variabelsubstitutionen $\begin{cases} u=\frac{\cosh x}{y} \\ v=ye^x \end{cases}$, då avbildas $D$ på $D': \begin{cases} 1\le u\le 2 \\ 2\le v\le 3 \end{cases}$, funktional-determinanten är $\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sinh x}{y} & \frac{-\cosh x}{y^2} \\ ye^x & e^x \end{vmatrix} = \frac{e^x}{y}(\sinh x+\cosh x)=\frac{e^{2x}}{y}=\frac{1}{\frac{d(x,y)}{d(u,v)}}\ (>0)$, alltså blir

$$\iint_D \frac{e^{2x}}{y\left(e^{2x}+1\right)}dx\,dy = \iint_{D'}\frac{1}{e^{2x}+1}du\,dv = \left[e^{2x}+1=ye^x\,\frac{e^x+e^{-x}}{y}\right]=$$

$$= \int_2^3\int_1^2 \frac{1}{2vu}du\,dv = \tfrac{1}{2}[\ln v]_2^3[\ln u]_1^2 = \underline{\tfrac{1}{2}\ln 2\ln\tfrac{3}{2}}.$$



# REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del C för E1, 2000

## Moment 6: vektoranalys i planet

**1.** Vad är ett konservativt kraftfält? En potential? En exakt differentialform?
**2.** Vilka viktiga egenskaper har ett konservativt kraftfält (arbetet oberoende av vägen, nämligen potentialskillnaden; kan du visa det)?
**3.** Hur kan du visa att ett fält är konservativt?
**4.** Kan du (formulera, bevisa) Greens sats?

## EXTRAUPPGIFTER

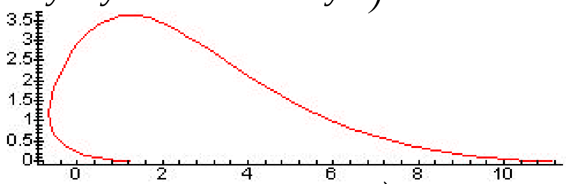
**1.** För vilken enkel, sluten $C^1$-kurva $C$ uträttar kraftfältet $\left(x^2y+y^3-12y, 24x-x^3-6xy^2\right)$ det största arbete, då en partikel förflyttas ett varv moturs längs $C$?

**2.** Beräkna det arbete som kraftfältet

$$\mathbb{F}=\left(\frac{2x}{x^4+2x^2y+y^2+1}+\frac{1}{2+x+y^2},\frac{1}{x^4+2x^2y+y^2+1}+\frac{2y}{2+x+y^2}\right)$$

uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan

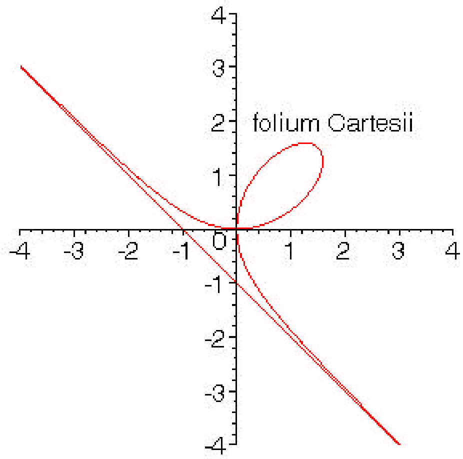
$$C:\begin{cases} x=\frac{1}{2}t^2-\frac{2}{3}\cos t \\ y=\sinh(1+\sin t)\end{cases}, -\tfrac{\pi}{2}\overset{t}{\longrightarrow}\tfrac{3\pi}{2}.$$




**3.** Beräkna det arbete som kraftfältet $\left(2x+3y+xe^{x^2+y^2}, 2x+3y+ye^{x^2+y^2}\right)$ uträttar då en partikel förflyttas från $(0,0)$ till $(\pi,0)$ längs kurvan $y=\sin x$.

**4.** Beräkna arean av området inom öglan av kurvan

$$C:\begin{cases} x=\frac{3t}{1+t^3} \\ y=\frac{3t^2}{1+t^3}\end{cases}, -1\neq t\in\mathbb{R}$$ (Descartes' blad).




<u>**svar:**</u> **1)** Ellipsen $C: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

**2)** $\arctan\frac{81\pi^4}{64}-\arctan\frac{\pi^4}{64}+\ln\frac{16+9\pi^2}{16+\pi^2}$

**3)** $2+\pi^2+\frac{1}{2}e^{\pi^2}$

**4)** $\frac{3}{2}$