VECKANS PROBLEM

Lösningsförslag till VP5

a) "Upptäck" att $\mathbb{F}$ är konservativt, antingen genom att visa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4xy+2y^3-y}{1+\left(2x+y^2\right)^2}\right)=\frac{4y\left(1+\left(2x+y^2\right)^2\right)-\left(4x+2y^2-1\right)4y\left(2x+y^2\right)}{\left(1+\left(2x+y^2\right)^2\right)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4x+2y^2-1}{1+\left(2x+y^2\right)^2}\right),$$

eller genom att bestämma en potential Φ:

$$\Phi'_x=\frac{4x+2y^2}{1+\left(2x+y^2\right)^2}-\frac{1}{1+\left(2x+y^2\right)^2}\Rightarrow\Phi(x,y)=\tfrac{1}{2}\ln\left(1+\left(2x+y^2\right)^2\right)-\tfrac{1}{2}\arctan\left(2x+y^2\right)+f(y),\ f\equiv 0$$

duger. Arbetet kan då beräknas som "potentialskillnaden"

$$\Phi\left(-\sqrt{e^{-3\pi}},0\right)-\Phi(1,0)=\tfrac{1}{2}\left(\ln\left(1+4e^{-3\pi}\right)-\ln 5+\arctan 2+\arctan\left(2e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)\right),$$

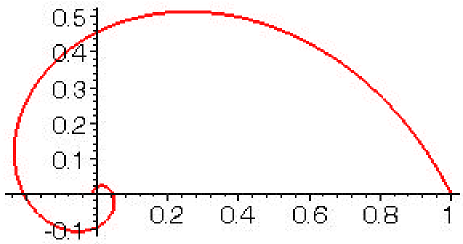
eller genom att välja en enklare väg ($\mathbb{F}$ är C^1 överallt), t.ex. sträckan på x-axeln:

$y=0,\ x=t,\ 1\xrightarrow{t}-\sqrt{e^{-3\pi}}$, arbetet är då

$$\int_1^{-\sqrt{e^{-3\pi}}}\frac{4t-1}{1+4t^2}dt=\tfrac{1}{2}\left[\ln\left(1+4t^2\right)-\arctan(2t)\right]_1^{-e^{-\frac{3\pi}{2}}}=\underline{\tfrac{1}{2}\left(\ln\left(1+4e^{-3\pi}\right)-\ln 5+\arctan 2+\arctan\left(2e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)\right)}$$

som ovan.

Kurvan är en spira



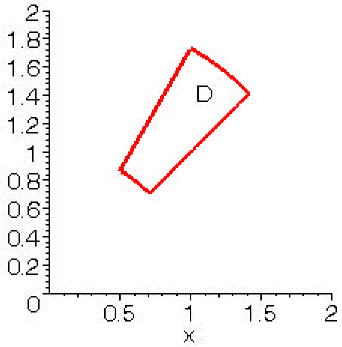
b) Naturligtvis använder vi Greens formel ($\mathbb{F}=(P(x,y),Q(x,y))=\left(\frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x},\ -\arctan\frac{x}{y}\right)$ är C^1 i en öppen mängd som innehåller området D som delmängd, orienteringen (positivt = moturs) är den rätta; tyvärr är $\mathbb{F}$ ej konservativt, då vore kurvintegralen längs ∂D noll):

$$\int_{\partial D}P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(Q'_x-P'_y\right)dx\,dy=\iint_D\left(\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\right)dx\,dy=[\text{pol. koord.}]=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_1^2\left(\frac{r\sin\varphi}{r^2}-\frac{1}{r^2}\right)r\,dr\,d\varphi=\int_1^2\left[-\cos\varphi-\tfrac{1}{r}\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}dr=$$

$$=\int_1^2\left(\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}-\tfrac{1}{2}\right)-\left(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\pi}{4}\right)\tfrac{1}{r}\right)dr=\underline{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}-\tfrac{\pi\ln 2}{12}}\ .$$

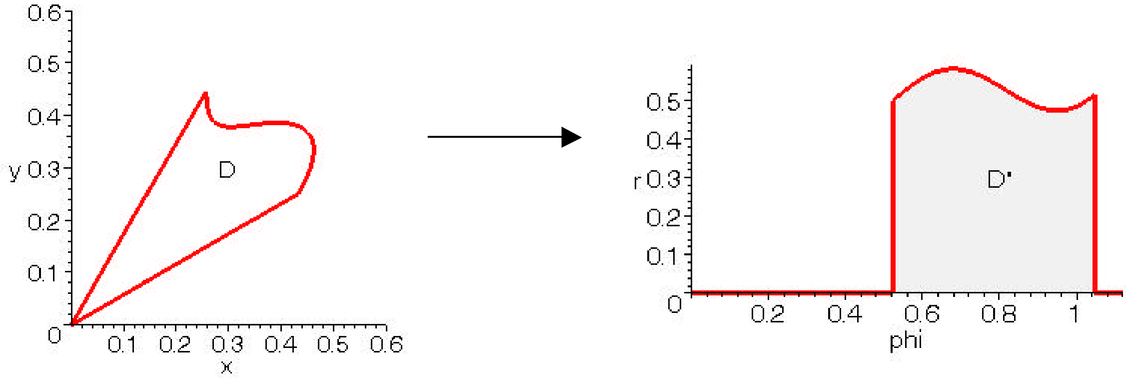
Området D:



ANMÄRKNING

Lösning till extrauppgift 3 (vp5, sid. 10):

Område t D i xy-planet som beskrivs
med polära koordinater av
$\alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le r \le f(\varphi)$ blir i j r-planet D':



För arean av D fås då den välkända formeln:

$$\underline{m(D)} = \iint_D dx\,dy = [\text{pol. koord.}] = \iint_{D'} r\,dr\,d\varphi = \int_\alpha^\beta \int_0^{f(\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \underline{\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\varphi))^2\,d\varphi}\,.$$

Ex: Descartes' ögla har den polära framställningen $r = \dfrac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, dess

area är alltså $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}\right)^2 d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\varphi}{(\tan^3\varphi+1)^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{9}{2}\left[\frac{-1}{1+\tan^3\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\tfrac{3}{2}}$ (generalis. int.!).

Du har förstås löst uppgiften med Green:

$$\iint_D dx\,dy \underset{\text{Green}}{=} \int_{\partial D} (-y)\,dx = \left[\partial D: \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3},\ dt = \frac{3(1+t^3-3t^3)}{(1+t^3)^2} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases},\ 0 \xrightarrow{t} \infty\right] = -9\int_0^\infty \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt = \left[\begin{matrix} t^3 = u \\ 3t^2 dt = du \end{matrix}\right] =$$

$$= 3\int_0^\infty \frac{-1+2x}{(1+x)^3}\,dx = 3\int_0^\infty \left(\frac{2}{(1+x)^2} - \frac{3}{2(1+x)^3}\right)dx = 3\left[\frac{2}{1+x} - \frac{3}{2(1+x)^2}\right]_0^\infty = \underline{\tfrac{3}{2}}\,.$$

Lika bra går $\iint_D dx\,dy = \int_{\partial D} x\,dy$ eller (enklast?) $\iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\left(\int_{\partial D} (-y)\,dx + x\,dy\right)$.