**Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2002-01-18, kl 8.45-12.45**
**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa
**Telefon:** Fredrik Altenstedt, tel. 0740 - 459022
**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

---

**1.** Låt $f(x,y)=(x^3-y^4)\ln(e-2+x^4+y^4)$.

**a)** Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(1,1,0)$. (4p)

**b)** Vilka värden antar $f'_{\boldsymbol{v}}(1,1)$ ( = riktningsderivatan av $f$ i punkten $(1,1)$ i riktningen $\boldsymbol{v}$ ), $\boldsymbol{v}\in\{(x,y): x^2+y^2=1\}$? (3p)

**2.** Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x,y)=x^3-2xy+2y^2$ och avgör deras typ. (6p)

**3.** Låt $\Omega=\{(x,y): x>0,\ y>0\}$, $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$.

**a)** Visa att tillordningen $(x,y)\mapsto(u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i $\Omega$. (2p)

**b)** Bestäm en funktion $f(x,y)$ som satisfierar
$x\,f'_x+y\,f'_y-2f=x^3y\cos(xy)$, $f(x,\sqrt{x})=0$ för $(x,y)\in\Omega$. (6p)

**c)** Beräkna arean av det område i $\Omega$ som begränsas av kurvorna
$y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{3}{x}$, $y=\frac{x}{2}$ och $y=2x$. (4p)

**4.** Låt $f(x,y)=(x^2+y^2)^2+\dfrac{2}{2-x^2-y^2}$, *l.e.* = längdenhet = *dm*.

**a)** Insidan av ett glas ges av $z=f(x,y)$, $x^2+y^2\le 1.21$. Man fyller vatten i glaset tills det står $2\,l.e.$ högt. Hur mycket vatten finns då i glaset? (4p)

**b)** Är $f$ differentierbar i origo? (2p)

**5.** Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F}(x,y)=\left(2y\sqrt{y}\sinh x+x^3,\ 3\sqrt{y}\cosh x+x\right)$ uträttar längs kurvan $C: y=\cosh(x),\ -\ln(2+\sqrt{3})\xrightarrow{x}\ln(2+\sqrt{3})$ (4p).
Beräkna även längden av $C$ (3p). (7p)

**6.** Visa att funktionen
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\ln(x+1)}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$
är deriverbar i origo. (4p)

**7. a)** Definiera inre punkt till en mängd och öppen mängd. (2p)

**b)** Låt $\mathbb{F}$ vara ett fält som är $C^1$ i $\mathbb{R}^3$. Visa att om kurvintegralen $\int_C \mathbb{F}\bullet d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen i $\mathbb{R}^3$ så är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^3$. (6p)

BB

**Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2001-08-24, kl. 12.15-18.15**
**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa
**Telefon:** Anna Nordqvist, tel. 0740 - 459022
**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

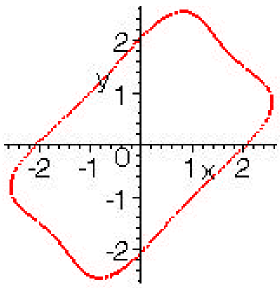
**1.** Låt $F(x,y,z,t)=\dfrac{\arctan(2x-3y+z)+t}{x^2+y^2+z^2+t^2}$
Beräkna riktningsderivatan av $F$ i punkten $(1,1,1,1)$ i riktningen $(-2,-2,1,-1)$.
I vilken riktning växer funktionsvärdena $F(x,y,z,t)$ snabbast i punkten $(1,1,1,1)$? (5p)

**2.** Låt $\Omega=\{(x,y):|x|<\frac{\pi}{2}, 1<y\}$, $u=y-\sin x$ och $v=y\sin x$.
**a)** Visa att $u, v$ duger som nya variabler i $\Omega$. (2p)
**b)** Lös problemet $\tan(x)z'_x - yz'_y = y+\sin(x)$, $z(\frac{\pi}{6},y)=\cosh(\frac{y}{2})-y$, $(x,y)\in\Omega$. (6p)
**c)** Beräkna $\iint_D \dfrac{y^2-\sin^2 x}{y\tan x}dxdy$ där området $D$ ges av olikheterna
$0<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}+\sin x\le y\le 2+\sin x$, $1\le y\sin x\le 2$. (4p)

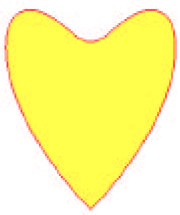
**3.** Beräkna längden av kurvan $y=\ln x$, $1\le x\le\sqrt{3}$. (4p)

**4.** För vilka reella tal $\alpha,\beta$ har $\dfrac{(\tan x - x)^\alpha}{(\tan x + x)^\beta}$ ett gränsvärde då $x$ går mot 0? (4p)

**5.** Låt $F(x,y)=(x-y)^4+2x^2y^2$.
**a)** Bestäm det minsta och det största avståndet mellan origo och en punkt på kurvan $C: F(x,y)=18$. (6p)
**b)** Visa att kurvan $C$ lokalt i punkten $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ är en funktionskurva $y=f(x)$ och ange en ekvation för tangenten till denna kurva i punkten $(\sqrt{3},\sqrt{3})$. (3p)




**6.** Låt $r(\varphi)=2\sqrt{\cos^2(2\varphi)+\sin^2(4\varphi)}$ och
$C: r=r(\varphi)$, $\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\varphi}\frac{3\pi}{4}$ ($r,\varphi$ polära koordinater).
**a)** Beräkna det arbete som kraftfältet $(\sin(2x)\sin(2y), -\cos(2x)\cos(2y))$ uträttar då en partikel förflyttas längs $C$. (2p)
**b)** Beräkna arean av det område som omslutes av $C$. (4p)



**7.** **a)** Definiera "positivt definit kvadratisk form". (2p)
**b)** Definiera "randpunkt till en mängd $M\subset\mathbb{R}^n$". (2p)
**c)** Formulera och bevisa Greens sats. (6p)

BB

**Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2001-03-05, kl 14.15-18.15**
**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa
**Telefon:** Erik Svensson, tel. 0740 - 459022
**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

**1.** Låt $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

**a)** Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(2,-1,1)$. (3p)

**b)** Beräkna riktningsderivatan av $f$ i punkten $(1,-1)$ i riktningen $(1,1)$. (2p)

**c)** Bestäm alla stationära punkter till $f$ och deras karaktär. (5p)

**2.** Vilka värden antar $f(x,y) = \cos(x) + \cos(y) + \sin(x+y)$
på triangeln $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq \pi$? (6p)

**3.** Låt $u = y e^x,\ v = \frac{x}{y}$ och $D = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\}$.

**a)** Visa att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i $D$. (2p)

**b)** Bestäm en funktion $f(x,y)$ som satisfierar
$x f'_x + y f'_y = (x+1) f,\quad f(y^2, y) = e^{y^2}$ för $(x,y) \in D$. (6p)

**c)** Beräkna $\iint_\Delta (x^2 + x) y^{-3} dxdy$ där $\Delta$ är det område i planet som begränsas
av kurvorna $y = e^{-x},\ y = 2e^{-x},\ y = 2x$ och $2y = x$. (6p)

Ledning till **b)** och **c)**: använd $u,v$ som nya variabler.

**4.** Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F}(x,y) = (xy + y\cosh(xy),\ xy + x\cosh(xy))$
uträttar då en partikel förflyttas från $(3,0)$ till $(-3,0)$ moturs längs cirkeln
$x^2 + y^2 = 9$. (6p)

**5.** Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3) + 6(\sin(x) - x)}{\sqrt[5]{1+x^5} - 1}$. (4p)

**6.** **a)** Visa att om en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i en punkt $(a,b)$
så är den kontinuerlig i $(a,b)$. (4p)

**b)** Låt $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara funktioner som är kontinuerliga på $[a,b]$ och
$g \geq 0$. Visa att det finns ett $\xi \in [a,b]$ så att $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$. (4p)

**c)** Definiera konservativt kraftfält. (2p)

BB

**Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2000-01-15, kl 8.45-12.45**
**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa.
**Telefon:** Erik Alapää, tel. 0740-459022
**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat!

**1.** Låt $f(x,y) = 1 + \sinh\left(\sin\left(x^2+y^2\right)\right) - \cosh(\cos(xy))$.

**a)** Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right)$. (4p)

**b)** Beräkna riktningsderivatan av $f$ i punkten $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ i riktningen $(1,1)$. (2p)

**2.** Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$ och avgör deras typ. (6p)

**3.** Låt $D = \{(x,y) : 0 < x < y\}$ och $u = 1 + x^2y^2,\ v = x + y$.

**a)** Visa att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt injektiv i $D$. (2p)

**b)** Lös problemet $xf'_x - yf'_y = x^2 - y^2,\ f(x,3x) = 1 + 8x^2 + 9x^4,\ (x,y) \in D$. (6p)

**4.** Låt $\mathbb{F}_1 = \left(\dfrac{xy^2 - x^2y^3}{x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1}, \dfrac{x^2y - x^3y^2}{x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1}\right),\ \mathbb{F}_2 = \left(y^2, x^2\right)$.

**a)** Visa att $\mathbb{F}_1$ är konservativt i $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, -\frac{1}{x} < y\right\}$. (2p)

**b)** Beräkna det arbete som $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$ uträttar då en partikel förflyttas längs ellipsbågen $C : \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}\cos\varphi \\ y = \sqrt{2}\sin\varphi \end{cases},\ 0 \xrightarrow{\varphi} \pi$. (6p)

**5.** Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna

$$y = 1,\ y = 4,\ y = 2x,\ y = 2x + 1,\ z = 0 \text{ och } z = \frac{\ln y}{1 + (2x - y)^2}.$$ (6p)

**6.** Funktionen $f$ definieras genom $f(0) = 1$ och $f(x) = \dfrac{\arctan x}{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$ för $0 < |x| < 1$.

Visa att funktionen är deriverbar i 0. (6p)

**7. a)** Definiera inre punkt, öppen mängd och kompakt mängd. (3p)

**b)** Visa att om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är deriverbar i $(a,b)$ och antar i $(a,b)$ ett lokalt extremvärde så är $(a,b)$ en stationär punkt till $f$. (4p)

**c)** Definiera båglängdselementet av en kurva. (3p)

BB

**<u>Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 1999-03-08, kl 14.15-18.15</u>**
**<u>Hjälpmedel:</u>** Inga, ej heller räknedosa.
**<u>OBS:</u>** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat!

---

**1.** Låt $F(x,y,z)=\cosh(xz-yz)+\sinh(x+y-z)$ och $P=(1,1,2)$.
**a)** Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z)=1$ i punkten $P$. (4p)
**b)** Beräkna riktningsderivatan av $F$ i punkten $P$ i riktningen $\vec{v}=(2,1,2)$. (3p)
**c)** Visa att nivåytan $F(x,y,z)=1$ lokalt i $P$ är en funktionsyta $z=f(x,y)$. (1p)

**2.** Beräkna längden av kurvan $C: y^2=x^3$, $0\le x\le 1$ [ "Neil's parabel" ]. (4p)

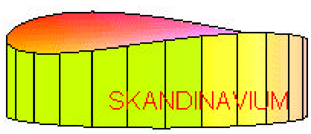
**3.** Bestäm för $0<|y|<x<1$ en funktion $z(x,y)$ som är $0$ på Neil's parabel (se uppg.2) och satisfierar $x^3z'_x+x^2yz'_y=y^2$
[ledn: inför de nya variablerna $u=x^2-y^2$, $v=x^2y^{-2}$ ] . (6p)

**4.** Betrakta kroppen $K=\left\{(x,y,z): x^2+y^2\le 2500,\ 0\le z\le 15+\frac{x^2}{500}\right\}$.
**a)** Beräkna $K$:s volym. (4p)
**b)** Klockan 12 en vacker vårdag var temperaturen i en punkt $(x,y,z)$ på $K$:s tak $T(x,y,z)=10^{-3}\left(y^2-xy+500z\right)$ [$^{\circ}$Celsius].
Mellan vilka värden varierade temperaturen på $K$:s tak då ? (6p)
[ $K$:s tak är ytan $\left\{(x,y,z): x^2+y^2\le 2500,\ z=15+\frac{x^2}{500}\right\}$ ]

**5.** Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F}(x,y,z)=(y-z,z-x,-xy)$ uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan
$$C:\begin{cases} x=50\cos t\\ y=50\sin t\\ z=15+5\cos^2 t\end{cases},\ -ð \xrightarrow{t} ð\ .$$ (5p)

**6.** Funktionen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är $C^3$ i $D: x^2+y^2<1$
och funktionen $$\frac{f(x,y)-1+x^2+4xy+7y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$$ är begränsad i $D$.
Visa att origo är en stationär punkt till $f$ och avgör dess karaktär. (5p)

**7.** **a)** Vad menas med att en funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är differentierbar i $(a,b)$? (2p)
**b)** Definiera konservativt kraftfält. (2p)
**c)** Formulera Taylors formel för en funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. (2p)
**d)** Formulera och bevisa Greens sats. (6p)

Kroppen $K$ (uppgift 4, 5): 

## Svar (gamla del C-tentor)

**02-01-18:**

**1a)** $3x-4y-z=-1$ **b)** $[-5,5]$ **2)** $(0,0)$: sadelpunkt, $(\frac{1}{3},\frac{1}{6})$: lok. minimipunkt

**3b)** $f(x,y)=\frac{x^2}{2}\left(\sin xy-\sin\left(\frac{x}{y}\right)^3\right)$ **c)** $2\ln 2$ *a.e.* **4a)** $\frac{2\pi}{3}(4-3\ln 2)\ dm^3$ **d)** ja

**5)** arbetet är $2(2\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3})$, kurvans längd är $2\sqrt{3}$ *l.e.*

**01-08-24:**

**1a)** $F_v'(1,1,1,1)=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $F$ växer i punkten $(1,1,1,1)$ snabbast i riktningen $(3,-7,1,1)$

**2b)** $z(x,y)=\sin x+\cosh(y\sin x)-y-\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{7}{8}\ln 2$ **3)** $2-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{6}-\sqrt{3})$

**4)** $\beta\le 3\alpha$ **5a)** $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{3\sqrt{6}}$ **b)** $x+y=2\sqrt{3}$ **6a)** 0 **b)** $\pi$

**01-03-05:**

**1a)** $9x+9y-z=8$ **b)** $(0,0)$: sadelpunkt, $(-1,-1)$: lok. maximipunkt

**2)** $[0,\frac{3\sqrt{3}}{2}]$ **3b)** $f(x,y)=\frac{y^2}{x}e^x$ **c)** $\frac{15}{8}\ln 2$ **4)** 18 **5)** $\frac{1}{4}$

**00-01-15:**

**1a)** $\sqrt{2\pi}\,x+\sqrt{2\pi}\,y+z=2\pi$ **b)** $-2\sqrt{\pi}$ **2)** (0,0): sadelpunkt, (3,3): lok. minimipunkt

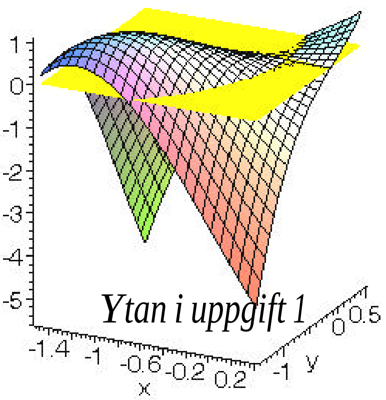
**3b)** $f(x,y)=1+xy+x^2y^2+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ **4b)** $2\sqrt{6}\left(\pi-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ **5)** $\ln 2-\frac{3\pi}{8}$

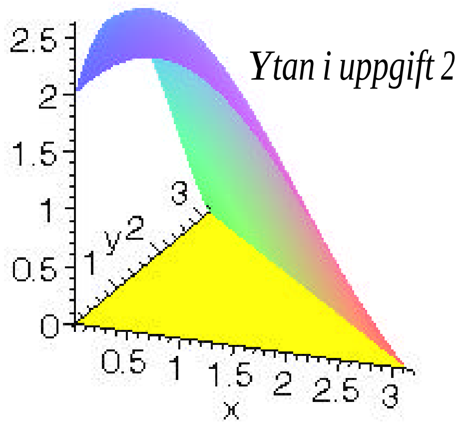
**99-03-08:**

**1a)** $z=x+y$ **b)** $\frac{1}{3}$ **2)** $\frac{2}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)$ **3)** $z(x,y)=\frac{y^2}{x^2}\ln\frac{x^3}{y^2}$

**4a)** $40625\pi$ **b)** $[\,7.5^{\circ}, 11.25^{\circ}\,]$ **5)** $1250\pi$ **6)** lok. maximipunkt

Ytorna i tentan 01-03-05:




**Lycka till**

Bernhard