INSTUDERINGSUPPGIFTER

- Dessa uppgifter skall hjälpa dig vid inlärningen, de skall fungera som ett slags diagnostiskt prov: (hur bra) kan du redan det vi har gått igenom den gångna veckan? Försök först att lösa uppgifterna hemma, skriv ner dina lösningar på ett bra sätt, ta med dem till räknestugan och diskutera dem i smågrupp: är lösningen korrekt? fullständig? bra nerskriven? omständlig? är alla använda begrepp/satser klara? Det viktigaste är inte att du har en korrekt lösning utan att du jobbar bra med uppgifterna! Diskutera då även föreläsningarna, repetitionsfrågorna (de liknar teorifrågorna på tentan och frågorna på "muntan" efter hela ettans matte) och extraövningarna.
- Tänk på att du måste träna att formulera dig, att skriva ner en lösning på ett acceptabelt sätt. Uppgifterna är eller liknar tenta-uppgifter.
- Lösningar (ev. med kommentarer och nya frågor) delas ut tidigast veckan efter… .

PROBLEM 1 (lösningen skall vara klar on/to vecka5)

a) Given är kurvan $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \left(t,\, t^2 - 4,\, t\right),\; -2 \xrightarrow{t} 2$.
Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F} = (xy + z,\, \sin x + \sinh y + \cos z,\, xyz)$ uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan C.
Beräkna även längden av kurvan C.

b) Är funktionen $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^2 y\right)}{xy^2}, & \text{då } xy \neq 0 \\ 0, & \text{då } xy = 0 \end{cases}$ kontinuerlig resp. part. deriverbar i origo?

REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del C

Moment 1: mängder och funktioner, gränsvärde, differentialkalkyl

1. Vad är en öppen/sluten/begränsad/kompakt mängd? Vad är en inre punkt? En randpunkt?

2. Vad är en vektorvärd funktion av n reella variabler (fält)?
Hur definieras gränsvärde för fält? Kontinuitet? Vad är så bra med kontinuitet?

3. Hur definieras partiella derivator för reellvärda funktioner? Riktningsderivata? Differentierbarhet? Differential? Tangentplan? Klassen C^m?

4. Kan du visa att C^1-funktioner är differentierbara? Att en differentierbar funktion är kontinuerlig? Kedjeregeln? För vilka funktioner f gäller $f''_{xy} = f''_{yx}$?

5. Vad är gradienten av en funktion? Vad ger den? Bevis?

Moment 2: kurvor, kurvintegral (arbete, längd)

1. Vad är en (orienterad) kurva (av klassen C^m)? Tangentvektorn? En nivåkurva?

2. Vad är en kurvintegral? Arbete? Kan du motivera dina svar?

3. Vad är båglängdselementet? Längden av en kurva? Kan du motivera dina svar?

EXTRAUPPGIFTER

1. Låt $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Vi har definierat: M är *öppen* om varje punkt i M är inre punkt i M och M är *sluten* om $\mathbb{R}^n \setminus M$ är öppen. Visa:
M är sluten $\Leftrightarrow$ $\partial M \subseteq M$ (kursbokens definition).

2. Domkyrkan i Ulm har ett $161m$ högt torn med en spiraltrappa som man kan gå upp i. Hur lång tid tar det dig att nå utsiktsplattformen på $150m$ höjd, om du startar i punkten $(\sqrt{3},0,0)$ och går $1km/h$ längs gånglinjen $\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, t)$?

3. Beräkna längden av parabelbågen $y = x^2$ mellan $(1,1)$ och $(2,4)$.

svar:

2. 18 minuter
3. $\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}\ln\left(\left(\sqrt{17}-4\right)\left(\sqrt{5}+2\right)\right)$.

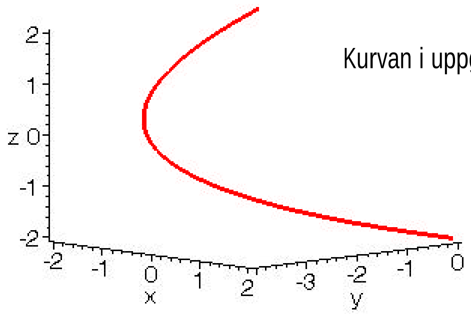
Tips (repetition): den integral du får för att beräkna längden i uppg. 1a) bör du kunna (del A!):
antingen du börjar med partiell integration: $\int (1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx = x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \int \frac{1}{2}x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}2xdx =$

$= x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int (1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$ osv.,

eller (fiffigast) du substituerar $x = \sinh t$:

$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \cosh t \cosh t\,dt = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sinh 2t) = \frac{1}{2}(t+\sinh t\cosh t) = \frac{1}{2}\left(\sinh^{-1}x + x\sqrt{1+x^2}\right)$;

kom ihåg att $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ och $\sinh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$!



Kurvan i uppg. 1a)