INSTUDERINGSUPPGIFTER

PROBLEM 2 (lösningen skall vara klar v6)

a) Är funktionen $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{xy^2}, & \text{då } xy\neq 0\\ 0, & \text{då } xy=0\end{cases}$ differentierbar?

b) Låt $F(x,y,z)=\sin(ye^x)+e^{x+2y+4z}$.

- I vilken riktning avtar F snabbast i origo?
- Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan Y: $F(x,y,z)=1$ i origo, först direkt (med F), sedan genom att beskriva Y som en funktionsyta $z=f(x,y)$ nära origo.

c) Bestäm en funktion $z(x,y)$ som satisfierar $xz'_x - yz'_y = 2$ och $z(x,x)=x^2$ för $(x,y)\in D=\{(x,y): x>0, y>0\}$
(ledn: inför de nya variablerna $u=\arctan(xy)$, $v=\frac{x}{y}$).

Lösningsförslag till instuderingsuppgift1

a) $A=\int_C \mathbb{F}\bullet d\boldsymbol{r}=\int_{-2}^{2}\mathbb{F}\bullet\boldsymbol{r}'dt=$

$$=\int_{-2}^{2}\left(t(t^2-4)+t,\sin t+\sinh(t^2-4)+\cos(t),\ t(t^2-4)t\right)\bullet(1,2t,1)\,dt=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(t(t^2-4)+t+\left(\sin t+\sinh(t^2-4)+\cos t\right)2t+t^2(t^2-4)\right)dt=[\text{utnyttja } \textit{jämn-udda} \text{ !!}]=$$

$$=2\int_0^2\left(2t\sin t+t^4-4t^2\right)dt=2\left[2(\sin t-t\cos t)+\tfrac{1}{5}t^5-\tfrac{4}{3}t^3\right]_0^2=2\left(2\sin 2-4\cos 2+\tfrac{32}{15}(3-5)\right).$$

$$L=\int_C ds=\int_{-2}^{2}|\boldsymbol{r}'(t)|dt=\int_{-2}^{2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\int_{-2}^{2}\sqrt{1+(2t)^2+1}\,dt=2\int_0^2\sqrt{2(1+2t^2)}\,dt=$$

$$=[\sqrt{2}t=u]=2\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+u^2}\,du=[\text{se sid 2}]=\left[u\sqrt{1+u^2}+\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^{2\sqrt{2}}=6\sqrt{2}+\ln(2\sqrt{2}+3).$$

Arbetet är alltså $\underline{\tfrac{4}{15}(15\sin 2-30\cos 2-32)}$ och längden $\underline{6\sqrt{2}+\ln(2\sqrt{2}+3)}$.

b) f är ej kontinuerlig i origo, ty t.ex. går $f(x,x)$ ej mot $f(0,0)=0$ då x går mot 0:

$$f(x,x)=\frac{\sin(x^3)}{x^3}\to 1 \quad \text{då } (x,x)\to(0,0).$$

Men f är deriverbar (även) i origo, ty $\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\dfrac{0-0}{h}=0\to 0$ då $h\to 0$ och

$\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\dfrac{0-0}{k}=0\to 0$ då $k\to 0$ (dvs. $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$).

Övningstentan lö 16/2 kl. 10.45-12.45 går i ML 11– 16. Stoffet: se kurshemsidan.
Här får du förra årets dugga:

Övningstentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del C, 2001-02-10
kl 8.45-10.45, i salarna ML 11-17
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
===

1. **a)** Bestäm en normalvektor till ytan $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3$ i punkten $(1,1,1)$. (2p)

b) Lös differentialekvation $x^2 z'_x + y^2 z'_y = x^2 z^2$ för $x>0,\ y>0$
genom att införa nya oberoende variabler $u=\frac{1}{x},\ v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$. (4p)

2. Låt C vara kurvan $y=e^{\frac{x}{4}}+4e^{-\frac{x}{4}},\ |x|\le 4$.

a) Beräkna längden av kurvan C. (4p)

b) Beräkna det arbete som kraftfältet $\left(-2\sinh\frac{x}{2}, 4\cosh\frac{x}{4}\right)$
uträttar då en partikel förflyttas längs C från $\left(-4, \frac{1}{e}+4e\right)$ till $\left(4, e+\frac{4}{e}\right)$. (4p)

3. Sök största möjliga a så att $\dfrac{1}{x^a}\left(\dfrac{\cosh(x^5)}{\sin(x^4)}-\dfrac{\cos(x^5)}{\sinh(x^4)}\right)$ har ett gränsvärde då x går mot 0 och bestäm detta gränsvärde. (5p)

4. Visa att om $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är en C^1-funktion så är f differentierbar. (6p)

svar:

1a) $(1,1,1)$ b) $z(x,y)=-\dfrac{1}{x+h\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)}$ där h är en godt. C^1–funktion.

2a) $10\sinh(1)$ b) $-6(2+\sinh(2))$

3) $a=4$, med detta a är gränsvärdet $\dfrac{1}{3}$.

Rättelse: extrauppgift 2 skall lyda så här:

Domkyrkan i Ulm har ett $161m$ högt torn med en spiraltrappa som man kan gå upp i.
Hur lång tid tar det dig att nå utsiktsplattformen på $150m$ höjd, om du startar i punkten $(\sqrt{3},0,0)$ och går $1km/h$ längs gånglinjen $\boldsymbol{r}(t)=\left(\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, t\right)$?