INSTUDERINGSUPPGIFTER

PROBLEM 3 (lösningen skall vara klar v7)

Funktionen f definieras genom $f(0)=1$ och $f(x)=\dfrac{\arctan x}{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$ för $0<|x|<1$.

Visa att funktionen är deriverbar i 0.

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 2

a) Nej, f är ej kontinuerlig i origo!

b) Svaren fås m.h.a. gradientvektorn:

$gradF=\left(ye^x\cos\left(ye^x\right)+e^{x+2y+4z},\, e^x\cos\left(ye^x\right)+2e^{x+2y+4z},\, 4e^{x+2y+4z}\right)$, alltså är $gradF(0,0,0)=(1,3,4)$ och vi får: F avtar snabbast i riktningen $\underline{-(1,3,4)}$ och tangentplanet har ekv. $gradF(0,0,0)\bullet(x-0,y-0,z-0)=0$, alltså $\underline{x+3y+4z=0}$.

Vi kan också lokalt kring origo lösa ut z:

$e^{x+2y+4z}=1-\sin\left(ye^x\right)\Rightarrow z=\frac{1}{4}\left(\ln\left(1-\sin\left(ye^x\right)\right)-x-2y\right)=f(x,y)$ och tangentplanet fås nu som $z=f(0,0)+f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y$ där $gradf=\frac{1}{4}\left(\frac{-ye^x\cos\left(ye^x\right)}{1-\sin\left(ye^x\right)}-1,\frac{-e^x\cos\left(ye^x\right)}{1-\sin\left(ye^x\right)}-2\right)$,

alltså $gradf(0,0)=\frac{-1}{4}(1,3)$ och det ger samma svar s.o..

c) $xz'_x-yz'_y=x\left(z'_uu'_x+z'_vv'_x\right)-y\left(z'_uu'_y+z'_vv'_y\right)=\frac{xy-yx}{1+x^2y^2}z'_u+2\frac{x}{y}z'_v=2vz'_v\overset{!}{=}2$, denna differentialekvation har den allmänna lösningen $z(u,v)=ln\,v+g(u)$ (g en godt. C^1-funkt.), dvs. (back to x,y): $z(x,y)=\ln\frac{x}{y}+g(\arctan(xy))=\ln x-\ln y+f(xy)$ (f en godt. C^1-funkt.).

Nu skall $z(x,x)=f\left(x^2\right)=x^2$, det ger $f(t)=t$ och svaret $\underline{z(x,y)=\ln x-\ln y+xy}$.

REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del C

Moment 3: taylorutveckling

1. Vad är Taylorpoynomet (-utvecklingen) av en reellvärd funktion (i en eller flera variabler)? Kan du härleda ”formeln”? Kan du Taylorutvecklingen för de elementära funktionerna? Binomialsatsen?

2. Kan du formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats för två funktioner?

3. Kan du bevisa att $\lim_{n\to\infty}\dfrac{t^n}{n!}=0 \quad (t\in\mathbb{R})$?

4. Kan du L’Hospitals regler?

EXTRAUPPGIFTER

4) Visa att för ett polynom $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ gäller $a_k = \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$

för $k = 0,1,2,\cdots,n$.

5) Ange Maclaurinpolynomet av grad 8 till $f(x)=\dfrac{1}{\cos(x^2)}$. Gör tre lösningar:

(1) med ansättningen $f(x)=\sum_{k=0}^{8} a_k x^k + \cdots$,

(2) med $\dfrac{1}{1-t} = 1+t+t^2+\cdots$ och

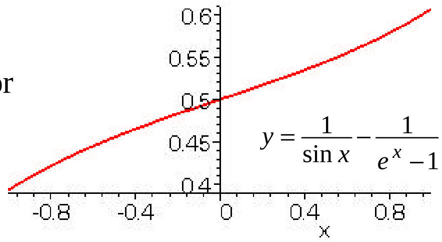
(3) med "lång division".

6) Visa att funktionen $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$ är C^1 i $|x|<\pi$.

7) Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}-\dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{\sinh x}\right)$.

svar: **5)** $f(x)=1+\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{5x^8}{24}+x^8 o(1)$

6) Visa först att $f'(0)=\frac{1}{12}$, sedan att f' är kontinuerlig i 0! Glöm ej att motivera varför f är C^1 i $0\neq x\in(-\pi,\pi)$.



7) $\frac{1}{6}$