INSTUDERINGSUPPGIFTER

PROBLEM 4 (lösningen skall vara klar v8)

a) Låt $u = \arctan(xy),\ v = \dfrac{x}{y}$ för $(x,y) \in D = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ (problem 2c).
Visa att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i D.

b) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y) = \ln|2x-1| + \ln|y| + xy - x$ och deras karaktär.

c) Bestäm värdemängden till funktionen $f(x,y) = \dfrac{1+2x+2y}{1+x^2+y^2}$, $D_f = \mathbb{R}^2$.

Lösningsförslag instuderingsuppgift 3

Nämnaren (= $\tanh^{-1}(x)$!!) har (den enkla) Maclaurinutvecklingen

$$\tfrac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \tfrac{1}{2}\left(\left(x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + x^3 o(1)\right) - \left(-x - \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3} + x^3 o(1)\right)\right) = x + \tfrac{x^3}{3} + x^3 o(1).$$

Vi skall undersöka om $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\arctan x - \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))}{x \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))}$ har ett gränsvärde då x går mot 0. Vi Maclaurinrutvecklar, först nämnaren, bara första termen, sedan täljaren t.o.m. samma grad:

$$\frac{\arctan x - \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))}{x \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))} = \frac{x + x^2 o(1) - (x + x^2 o(1))}{x^2 + x^2 o(1)} = \frac{x^2 o(1)}{x^2 + x^2 o(1)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0,$$

det visar att f är deriverbar i 0 med $f'(0) = 0$.

REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del C

Moment 4: max-min-problem, funktionalmatris, funktionaldeterminant

1. Vad är en stationär punkt? Kan du visa att för deriverbara funktioner gäller: inre extrempunkter är stationära? Gäller omvändningen?

2. Vad är en (positivt definit resp. negativt definit resp. indefinit) kvadratisk form? Hur kan man bestämma karaktären av stationära punkter?

3. Vad är funktionalmatrisen och funktionaldeterminanten av ett fält? Vad är ett differentierbart fält? Kan du (skriva upp) kedjeregeln för fält? Vad ger funktionaldeterminanten? Vad är differentialen till ett C^1-fält (sid. 114)?

4. Vad är en (lokalt) bijektiv funktion?
Kan du (formulera, tillämpa) inversa och implicita funktionssatsen?

5. Hur hittar man största/minsta värde av en funktion (ev. under bivillkor)?

EXTRAUPPGIFTER

8. Visa att för positiva reella tal x,y,z gäller: $xyz = a^3 \Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z) \geq (1+a)^3$.

9. Ett plåtkärl har formen av ett rätblock. Plåten i bottenytan kostar 2 *öre/cm*^{2} och i de övriga fem sidorna 1 *öre/cm*^{2}. Vilka mått skall kärlet ha för att rymma maximal volym, då den totala plåtkostnaden uppgår till 36 *öre*?

10. I vilka punkter på ellipsoiden $Y: \ (x-y)^2 + 2y^2 + 4z^2 = 6$ är det elektriska fältet starkast, resp. svagast, då den elektriska potentialen i punkten (x,y,z) är $\Phi(x,y,z) = x^2 - \sqrt{2}\,y^2 + \sqrt{6}\,z^2$ (du skall alltså bestämma de punkter på Y i vilka $\left|-grad\Phi(x,y,z)\right|$ antar sitt största, resp. sitt minsta värde).

<u>svar</u>:

9) $2cm \times 2cm \times 3cm$

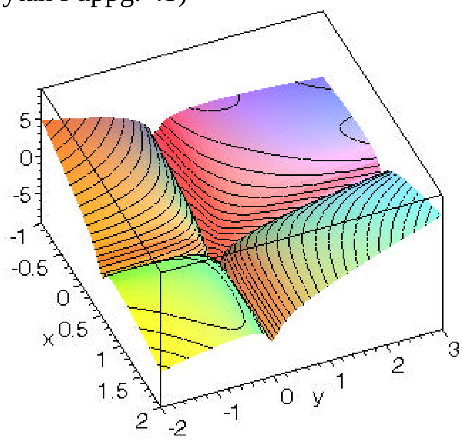
10) störst i $\pm\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0\right)$, minst i $\pm(1,-1,0)$

<u>ANM</u>.: I linjär algebra visas att för en kvadratisk form $Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ gäller:

$$Q \text{ är } \begin{cases} \text{positivt definit} \\ \text{negativt definit} \\ \text{indefinit} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \begin{cases} > 0 \text{ och } A > 0 \\ > 0 \text{ och } A < 0 \\ < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{egenvärdena till} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \text{är} \begin{cases} \text{alla } > 0 \\ \text{alla } < 0 \\ \text{ett} > 0, \text{ett} < 0 \end{cases}$$

[egenvärdena till $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ är rötterna till polynomet $\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix}$].

ytan i uppg. 4b)



ytan i uppg. 4c)