INSTUDERINGSUPPGIFTER

PROBLEM 6 (lösningen skall vara klar v10)

a) Låt $\mathbb{F} = \left(\dfrac{4x+2y^2-1}{1+\left(2x+y^2\right)^2}, \dfrac{4xy+2y^3-y}{1+\left(2x+y^2\right)^2} \right)$.

Visa att $\mathbb{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ och beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs spiralen $C : \begin{cases} x = \sqrt{e^{-t}}\cos t \\ y = \sqrt{e^{-t}}\sin t \end{cases}, 0 \xrightarrow{t} 3ð$.

b) Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C \tfrac{1}{x}\arctan\tfrac{y}{x}\,dx - \arctan\tfrac{y}{x}\,dy$ där C är den positivt orienterade randen till det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=x$, $y=\sqrt{3}\,x$.

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 5

a) Beräkna först snittet mellan konen och sfären, antingen genom att sätta in $x^2+y^2=\frac{1}{4}z^2$ från konen i sfären, det ger $\frac{1}{4}z^2+(z-1)^2=2 \Rightarrow z^2-\frac{8}{5}z=\frac{4}{5} \Rightarrow \cdots \Rightarrow z=2$, eller genom att sätta in $z=2\sqrt{x^2+y^2}=2r$ från konen isfären, det ger $r^2+(2r-1)^2=2 \Rightarrow r^2-\frac{4}{5}r=\frac{1}{5}$ $\Rightarrow \cdots \Rightarrow r=1$. Kroppen $K=\left\{(x,y,z):(x,y)\in D,\, 2\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1+\sqrt{2-x^2-y^2}\right\}$, med $D: x^2+y^2\le 1$, har då volymen $m(K)=\displaystyle\iint_D \left(1+\sqrt{2-x^2-y^2}\right)dx\,dy-\iint_D\left(2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy=$

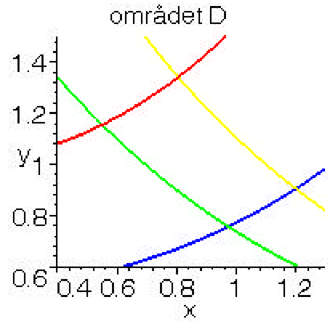
$$= [\text{pol. koord.}] = \int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1+\sqrt{2-r^2}-2r\right)r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^1\left(r+r\sqrt{2-r^2}-2r^2\right)dr =$$

$$=\pi\left[r^2-\tfrac{2}{3}\left(2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{4}{3}r^3\right]_0^1 = \underline{\tfrac{\pi}{3}\left(4\sqrt{2}-3\right)}.$$

b) Gör variabelsubstitutionen $\begin{cases} u=\frac{\cosh x}{y} \\ v=ye^x \end{cases}$, då avbildas D på $D': \begin{cases} 1\le u\le 2 \\ 2\le v\le 3 \end{cases}$, funktionaldeterminanten är $\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sinh x}{y} & \frac{-\cosh x}{y^2} \\ ye^x & e^x \end{vmatrix} = \frac{e^x}{y}(\sinh x+\cosh x)=\frac{e^{2x}}{y}=\frac{1}{\frac{d(x,y)}{d(u,v)}}$ (>0), alltså blir

$$\iint_D \frac{e^{2x}}{y\left(e^{2x}+1\right)}dx\,dy = \iint_{D'}\frac{1}{e^{2x}+1}du\,dv = \left[e^{2x}+1 = ye^x\,\frac{e^x+e^{-x}}{y}\right] =$$

$$= \int_2^3\int_1^2 \frac{1}{2vu}du\,dv = \tfrac{1}{2}[\ln v]_2^3[\ln u]_1^2 = \underline{\tfrac{1}{2}\ln 2\ln\tfrac{3}{2}}.$$



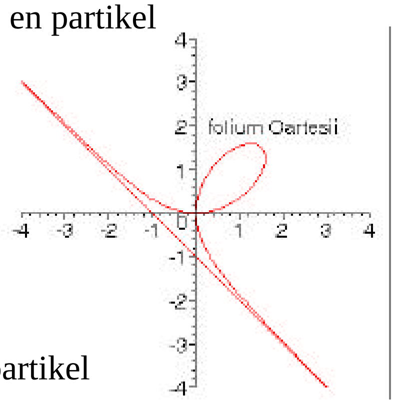
REPETITIONSFRÅGOR matem.metoder del C för E1

Moment 6: vektoranalys i planet

1. Vad är ett konservativt kraftfält? En potential? En exakt differentialform?
2. Vilka viktiga egenskaper har ett konservativt kraftfält (arbetet oberoende av vägen, nämligen potentialskillnaden; kan du visa det)?
3. Vad är en sluten kurva? En enkel kurva?
4. Vad är en bågvis sammanhängande, en enkelt sammanhängande mängd?
5. Hur kan du visa att ett fält är konservativt?
6. Kan du (formulera, bevisa) Greens sats?

EXTRAUPPGIFTER

13. För vilken enkel, sluten C^1-kurva C uträttar kraftfältet $\left(x^2y + y^3 - 12y, 24x - x^3 - 6xy^2\right)$ det största arbete, då en partikel förflyttas ett varv moturs längs C?



14. Beräkna arean av området inom öglan av kurvan

$$C: \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}, \; -1 \neq t \in \mathbb{R} \qquad \text{(Descartes' blad).}$$

15. Beräkna det arbete som kraftfältet $\left(2x + 3y + xe^{x^2+y^2},\ 2x + 3y + ye^{x^2+y^2}\right)$ uträttar då en partikel förflyttas från $(0,0)$ till $(\pi,0)$ längs kurvan $y = \sin x$.

svar: **13)** ellipsen $C: \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

14) $\frac{3}{2}$ (du får lösningen till denna uppgift!)

15) $2 + \pi^2 + \frac{1}{2}e^{\pi^2}$