

# INSTUDERINGSSUPPGIFTER

## Lösningförslag till instuderingsuppgift 6

a) "Upptäck" att  $\mathbf{F}$  är konservativt, antingen genom att visa

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{4xy + 2y^3 - y}{1 + (2x + y^2)^2} \right) = \frac{4y(1 + (2x + y^2)^2) - (4x + 2y^2 - 1)4y(2x + y^2)}{(1 + (2x + y^2)^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{4x + 2y^2 - 1}{1 + (2x + y^2)^2} \right),$$

eller genom att bestämma en potential  $\Phi$ :

$$\Phi'_x = \frac{4x + 2y^2}{1 + (2x + y^2)^2} - \frac{1}{1 + (2x + y^2)^2} \Rightarrow \Phi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(1 + (2x + y^2)^2) - \frac{1}{2} \arctan(2x + y^2) + f(y), f \equiv 0$$

duger. Arbetet kan då beräknas som "potentialskillnaden"

$$\Phi(-\sqrt{e^{-3\pi}}, 0) - \Phi(1, 0) = \frac{1}{2} \left( \ln(1 + 4e^{-3\pi}) - \ln 5 + \arctan 2 + \arctan\left(2e^{-\frac{3\pi}{2}}\right) \right),$$

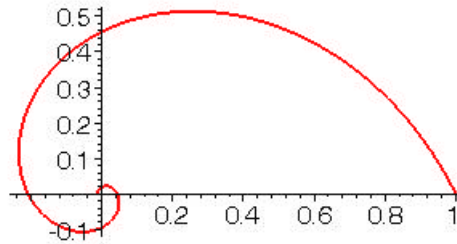
eller genom att välja en enklare väg ( $\mathbf{F}$  är  $C^1$  överallt), t.ex. sträckan på  $x$ -axeln:

$y = 0, x = t, 1 \xrightarrow{t} -\sqrt{e^{-3\pi}}$ , arbetet är då

$$\int_1^{-\sqrt{e^{-3\pi}}} \frac{4t-1}{1+4t^2} dt = \frac{1}{2} \left[ \ln(1 + 4t^2) - \arctan(2t) \right]_1^{-\sqrt{e^{-3\pi}}} = \frac{1}{2} \left( \ln(1 + 4e^{-3\pi}) - \ln 5 + \arctan 2 + \arctan\left(2e^{-\frac{3\pi}{2}}\right) \right)$$

som ovan.

Kurvan är en spira



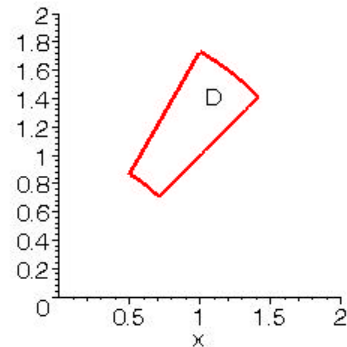
b) Naturligtvis använder vi Greens formel ( $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x}, -\arctan \frac{x}{y}\right)$  är  $C^1$  i en öppen mängd som innehåller området  $D$  som delmängd, orienteringen (positivt = moturs) är den rätta; tyvärr är  $\mathbf{F}$  ej konservativt, då vore kurvintegralen längs  $\partial D$  noll):

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy = \iint_D \left( \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2} \right) dx dy = [\text{pol. koord.}] =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \left( \frac{r \sin \phi}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) r dr d\phi = \int_1^2 \left[ -\cos \phi - \frac{1}{r} \phi \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dr =$$

$$= \int_1^2 \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \frac{1}{r} \right) dr = \frac{\sqrt{2}-1}{2} - \frac{\pi \ln 2}{12}.$$

Området  $D$ :

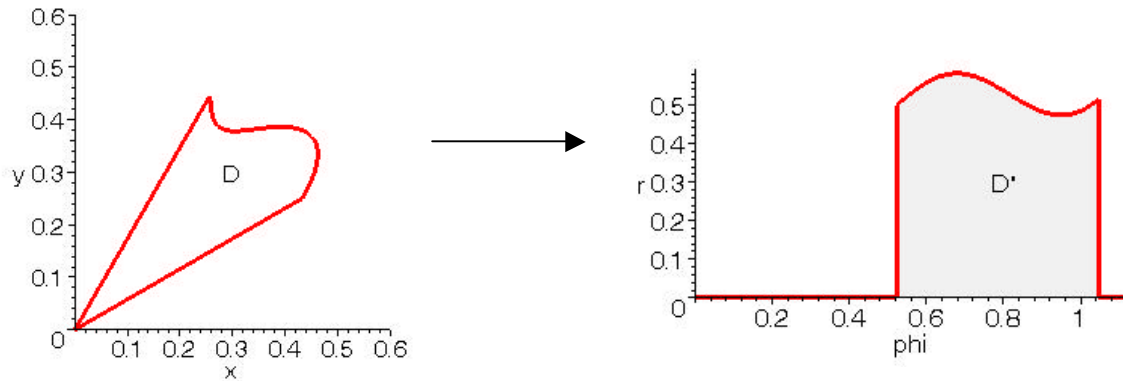


## ANMÄRKNING

Lösning till extrauppgift 14 (instuderingsuppgifter, sid. 12):

Allmänt: Ett område  $D$  i  $xy$ -planet som beskrivs med polära koordinater av  $\alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq f(\varphi)$

blir i  $r$ -planet  $D'$ :



För arean av  $D$  fås då den välkända formeln:

$$\underline{m(D)} = \iint_D dx dy = [\text{pol. koord.}] = \iint_{D'} r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{f(\varphi)} r dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\varphi))^2 d\varphi.$$

Ex: Descartes' ögla har den polära framställningen  $r = \frac{3 \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$ ,  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , dess

area är alltså  $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{3 \cos \varphi \sin \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} \right)^2 d\varphi = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 \varphi}{(\tan^3 \varphi + 1)^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{9}{2} \left[ \frac{-1}{1 + \tan^3 \varphi} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$  (generalis. int.!).

Du har förstås löst uppgiften med Green:

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \int_{\text{Green}} (-y) dx = \left[ \partial D : \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3}, dt = \frac{3(1+t^3-3t^3)}{(1+t^3)^2} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}, 0 \xrightarrow{t} \infty \right] = -9 \int_0^{\infty} \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} dt = \left[ \begin{matrix} t^3 = u \\ 3t^2 dt = du \end{matrix} \right] = \\ &= 3 \int_0^{\infty} \frac{-1+2x}{(1+x)^3} dx = 3 \int_0^{\infty} \left( \frac{2}{(1+x)^2} - \frac{3}{2(1+x)^3} \right) dx = 3 \left[ \frac{2}{1+x} - \frac{3}{2(1+x)^2} \right]_0^{\infty} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Lika bra går  $\iint_D dx dy = \int_{\partial D} x dy$  eller (enklast?)  $\iint_D dx dy = \frac{1}{2} \left( \int_{\partial D} (-y) dx + x dy \right)$ .