Datorlaborationer i matematiska metoder E1, del C, vt 2002

1. Laborationerna är ej obligatoriska.
2. Laborationerna genomförs individuellt. Grupparbete godkänns ej.
3. Laborationerna består av 4 uppgifter. Förtjänstfullt utförda lösningar kan ge bonuspoäng (en per uppgift) vid tentamina i matem. met. del C, 11/3, 23/8 och januari 2003.
4. Lösningarna skall göras angiven vecka och lämnas till mig angiven tid.
5. Skriv namn och personnummer längst upp på varje inlämnat blad, blad utan namn eller utan personnummer rättas ej. Lösningarna lämnas tillbaka med del C-tentan.

Syfte

Att öka förståelsen för kursens olika moment genom att lära dig att utnyttja datorn för att

- se kurvor och ytor i planet och i rummet, gradientfältet, nivåkurvor
- se hur bra Taylorpolynomet (av en eller två variabler) approximerar funktioner
- beräkna kurvintegral, Jacobi- (Hesse-) matris och determinant, stationära punkter samt deras karaktär.

Upgift 1 (funktionsytor, gradientfält)

[skall göras v 5, lämnas fr, 8/2, kl 15.00 till mig]

Med *maple*:

a) Rita en funktionsyta $z = f(x,y)$ tillsammans med nivåkurvorna i ytan samt deras projektion i xy-planet. Välj bland följande funktioner (från *DERIVE*):

$-\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}$ (a pagoda roof), $\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}$ (a ridge intersecting a valley),

$\dfrac{55}{50 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3.8\right)^2} - 1$ (a volcano), $-\dfrac{y}{8 + x^2 + y^2}$ (a mountain and a crater),

$y\left(3x^2 - y^2\right)$ (a monkey saddle), $e^{\frac{-x}{9}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(y)\right)$ (a surfer's perfect wave).

b) Låt $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ (a cliff is born).
Visa utan dator att $f(x,y)$ saknar gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$.
Rita funktionsytan $z = f(x,y)$ med nivåkurvorna i ytan, och sedan endast nivåkurvorna i xy-planet, så att du ser (förstår) bättre vad som händer nära origo.

c) Låt $f(x,y) = \dfrac{6\pi\cos\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{x^2 + y^2 + \pi}$ (sombrero). Rita i samma figur ytan $z = f(x,y)$, $x^2 + y^2 \le (4.4)^2$ och tangentplanet till ytan i punkten $(-1, 1, f(-1,1))$.
Rita även nivåkurvorna och gradientfältet till f för $|x| \le 5, |y| \le 5$ i en separat figur.

Med MATLAB:

d) Gör uppgift **1a)** och **1b)** med MATLAB.

Uppgift 2 (kurvor, arbete)

[skall göras v 5/6, lämnas fr 8/2 till mig, hophäftad med uppgift 1]

Betrakta kurvan C: $\begin{cases} x = (a + b\cos qt)\cos pt, \\ y = (a + b\cos qt)\sin pt, \quad 0 \xrightarrow{t} 2\pi \\ z = c\sin qt \end{cases}$ (torusknot),

då a,b,c,p,q ges av ditt personnummer enligt anvisningarna.

a) Rita C.

b) Beräkna det arbete som kraftfältet $(\sin(z+y),\ \cos(xyz), \arctan(x+y+z))$ uträttar då en partikel förflyttas från $(x(0), y(0), z(0))$ till $(x(\sqrt{2}), y(\sqrt{2}), z(\sqrt{2}))$ längs C, resp. längs en rät linje.

c) Beräkna längden av C.

Anvisningar, anmärkningar, ledningar:

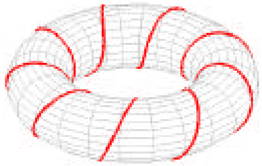
A. Allmänt

Gå igenom först mina exempel (ev. laborationerna till del A, B), de flesta ledningarna finns där. Anvisningarna gäller *maple*, anvisningar till MATLAB kommer sist.
OBS: för alla uppgifter gäller: du får gärna kommentera vad (hur) du gör, men f.f.a. skall du alltid kommentera resultatet (det du fick), gärna handskrivet! Svara på frågorna!
OBS: för alla plot-uppgifter gäller: för att få fram en så bra bild som möjligt måste du experimentera ett tag: vilket område i *xy*-planet skall du välja (rektanglar $a \le x \le b, c \le y \le d$ eller andra områden, i *maple* får c och d vara funktioner av x !), vilken plot-"*style*" (*wireframe, line, patch, contour...*) och vilken färgsättning och belysning, det klickar du enklast fram med musen, vilken noggrannhet (väljes med *grid = [n,m]*, default är $n = m = 25$, eller med *numpoints = k*, default är $k = 25\text{x}25=625$).
Kom ihåg hur derivator skrives, t.ex. för funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2$: Med *f:=(x,y)->x^2+y^2*
är *D[1](f)(x,y) = diff(f(x,y),x)* $= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$, *D[1,2](f)(x,y) = diff(f(x,y),x,y)* $= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)$
osv., med *f:=x^2+y^2* skall du skriva *diff(f,x)* *resp diff(f,x,y)* osv.
Ytor på parameterform (och dubbelintegraler) behandlar vi i laborationen till del D.

B. Till uppgifterna

Uppg1: Se ex1. Du kan begränsa de *z*-värden som skall plottas med *view= zmin..zmax* (bra om *f* är obegränsad). Glöm inte att lösa (för hand) och kommentera b)! b) bli väldigt tydligt med *filled=true*. Gradientvektorn beräknas med *>grad(f(x,y),[x,y])* och kan ritas med *gradplot* (*plots*-paketet!). Jag normerade den, för att se pilarna bättre (alla har då längd 1). Det görs med *normalize* (ladda in *linalg*-paketet!), men tänk på problemet med ev. nollvektorn! Ett fält ritas med *fieldplot* (se del B: riktningsfält till en diff-ekvation). Pilarnas utseende väljer du med *arrows*, försök med *arrows=thick* , är väldigt tydligt (*arrows=thin* är default). En bra framställning får man alltid om man ritar även definitionsområdet (= projektionen av ytan i *xy*-planet), rita helt enkelt ytan $z = 0$ (eller $z = c$)…

Uppg2: Ta som *a,b,c,p,q* de fem första siffrorna i ditt personnummer utom 0 (hoppa över nollor). T.ex. ger 89-12-17-0337 värdena 8,9,1,2,1, persnr. 89-01-10-3506 ger värdena 8,9,1,1,3; har du får många nollor i ditt persnr., så börjar du om från början: 80-01-02-0003 ger värdena 8,1,2,3,8). Kurvan kallas så ty det är en knut som ligger på (slingrar sig runt) en torus (= bilring, se uppg. 3.6). Se t.ex. på följande persnr. (vems?)→ Ritar en rymdkurva gör du med *spacecurve* (ladda in *plots*-paketet). Men för att se den bättre, skall du rita den som en slang med *tubeplot*, ta lämplig radie *radius* = …; glöm ej *scaling* = *constrained* (så att slangen är rund). Se ex2.



För att beräkna kurvintegralen $\int_\alpha^\beta \mathbb{F}(\mathrm{r}(t)) \bullet \mathrm{r}'(t)\,dt$ beräknar du skalärprodukten m.h.a. *dotprod* (ladda in *linalg*-paketet). Se ex2. Ta 3.1416 i.st.f. π om det tar för lång tid.
Obs: ange korrekt ekvation för ”sträckan”!

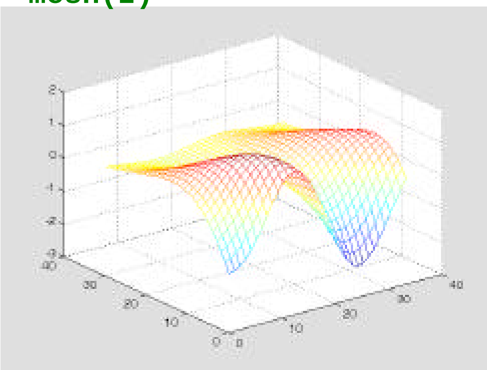
MATLAB:
För att rita med *MATLAB* läs direkthjälpen med *help*: *surf, surfl, view, mesh, meshc, ezplot3, meshz, meshgrid, title, xlabel, clabel, subplot, hold, gradient, contour, contour3, surfc, quiver, shading, comet, comet3* (för animerad ritning), *guide* (för proffsen). Uppg. 1b) blir tydligast med *waterfall*! Du kan skriva in funktionerna som "string" (utan punkt för matris-operation) med 'fnuttar' och definitionsmängden som [*xmin,xmax,ymin,ymax*], använd då *ezmesh, ezsurf, ezplot3, ezcontour, ezcontourf* osv.. Se matlab-ex.. Tips: titta på (gå igenom) *helpdesk*, där hittar du allt. Om du orkar kan du också göra 2c) med MATLAB, i toolbox/matlab/demo finns filen *tube.m*…! Även i MATLAB kan du dra 3d-graphik med musen (och se *view*-vinklarna) genom att skriva kommandot *>rotate3d* (onödigt med *ez*-kommandon). På nätet finns det utmärkta "matematik med MATLAB för M1" av *Carl-Henrik-Fant*: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tma065/9900. Se även E:s matlabsida: http://www.etek.chalmers.se/matlab
Litteraturtips:
Eva Pärt-Enander/Anders Sjöberg: Användarhandledning för MATLAB 5 (Uppsala, 98)
Robert B.Israel: Calculus The Maple Way (Addison-Wesley, 96)

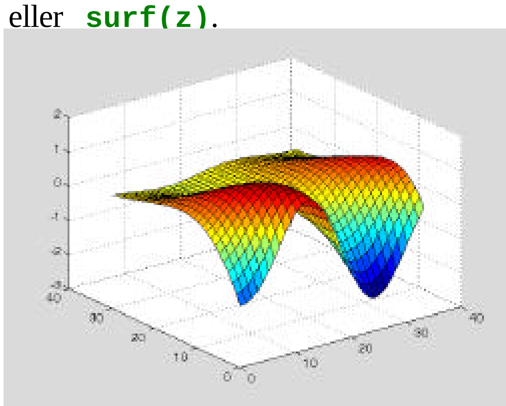
Lycka till !

Bernhard, januari 2002

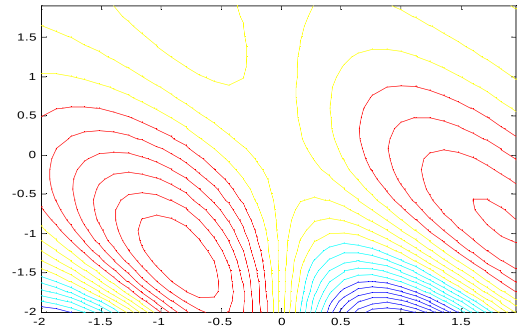
MATLAB – EXEMPEL

Vi tar samma funktion som i ex1. Obs: det ser bättre ut påskärmen!
Först skapar vi matrisen med alla gridpunkter:
`[x,y]=meshgrid(-2:.12:2,-2:.13:2);` Sedan skriver vi in funktionen:
`z=0.2+x.*sin(x+y).*exp(-x.^2/3-y.*2/3);` Gradienten beräknas (i samma pkt.):
`[ZX,ZY]=gradient(z);` Dåkan vi rita funktionsytan, nivåkurvorna och gradientfältet:
`mesh(z)` eller `surf(z)`.



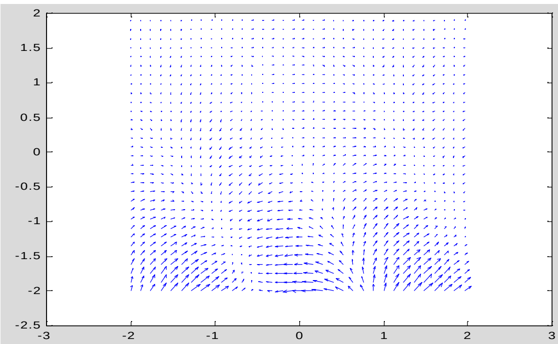


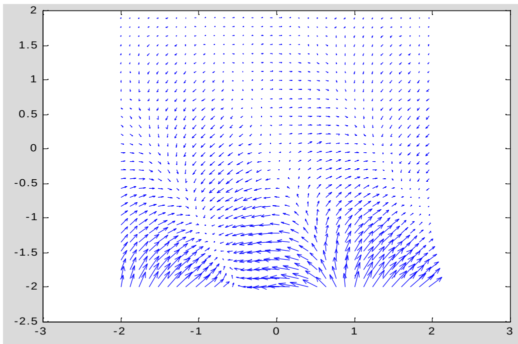
`contour(x,y,z,22)`
(genom att ange vektorerna *x* och *y* bestämmer vi skalan påaxlarna, 22 anger antalet nivåer).



Gradientfältet ritas med
`quiver(x,y,ZX,ZY)`.

Du kan skala pilarna med en faktor (default är 1), t.ex. `quiver(x,y,ZX,ZY,2)`.



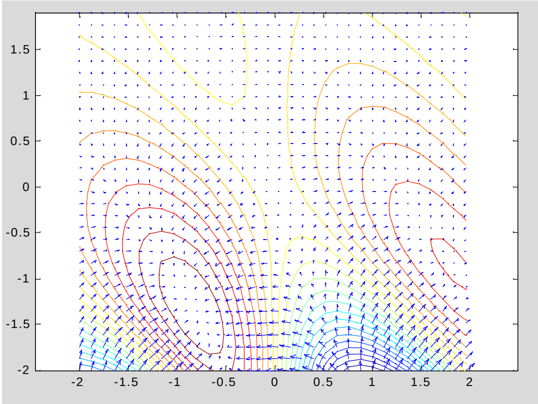


Enkelt och snyggt blir det med *ez*-kommandon (*rotate3d* är dåpå), t.ex.
`ezmesh('0.2+x.*sin(x+y).*exp(-x.^2/3-y.*2/3)',[-2,2,-2,2]);` resp. med
`ezmesh('0.2+x.*sin(x+y).*exp(-x.^2/3-y.*2/3)',[-2,2,-2,2]);` eller
`ezcontourf('0.2+x.*sin(x+y).*exp(-x.^2/3-y.*2/3)',[-2,2,-2,2]);`
Gör det!

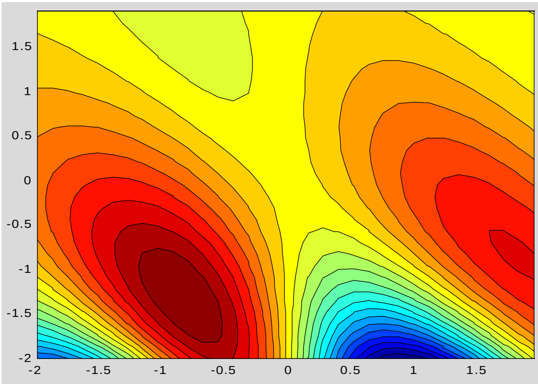
Och då ritar vi nivåkurvorna och gradientvektorerna i samma plott:

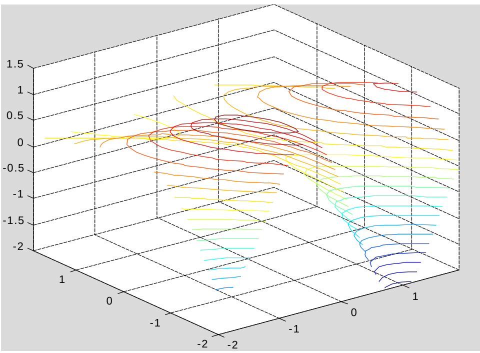
```
contour(x,y,z,22); hold on
quiver(x,y,ZX,ZY)
axis equal
```

glöm ej



Väldigt snyggt blir det f.ö. om du fyller ut med färg mellan nivå-kurvorna (glöm ej `hold off` !):
`contourf(x,y,z,22)`.





Ritar nivåkurvorna i ytan (3-dimensionellt) gör du med `contour3(x,y,z,22)`. Du kan låta MATLAB skriva ut "höjderna" med `clabel(contour3(x,y,z,22))`. Jag plottar inte den något rörliga bilden, men du kan bestämma vilka nivåer som skall anges och var (läs *help clabel*).

ANMÄRKNING:
Du kan se en yta fran olika "utsiktspunkter" genom att efter plotkommandot skriva *rotate3d* och sedan dra med musen (då kan du avläsa vinklarna för *view*) eller m.h.a. *view* (då får du alltid samma …). Vidare kan du bestämma ytans struktur och färgsättning på många sätt, läs *help plot*. Som exempel igen vår yta:

`surfc(x,y,z)` (ytan ritas med nivåkurvor)

och `s=[-1,-2,4];`

```
surfl(x,y,z,s);view([1,-4,2]);
shading interp
```

(inga linjer)

Gör det! Finns på utdelade papperskopian.