övning 4:20

Vi vill beräkna det största och det minsta värde som en funktion antar i ett område D; vad gör man om D inte är kompakt? Jo, det man alltid bör göra: man tänker! Vi räknar ö 4:20:

Bestäm det största och det minsta värdet av $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{\left(2+x^2+y^2\right)^2}$ i området $D : \lvert y\rvert \le 1$

Anm: p.g.a. symmetri räcker det att betrakta funktionen i området $D_+ : 0 \le x,\ 0 \le y \le 1$.

LÖSNING:

A) inre punkter:

$$\begin{cases} f'_x = \dfrac{2x\left(2+x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)2\left(1+x^2+y^2\right)2x}{\left(2+x^2+y^2\right)^4} = 0 \\ f'_y = \dfrac{-2y\left(2+x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)2\left(1+x^2+y^2\right)2y}{\left(2+x^2+y^2\right)^4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \ x(2+x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x = 0 \\ (2)\ \ y(2+x^2+y^2)+(x^2-y^2)2y = 0 \end{cases}$$

fall 1: $x = 0$: (2) ger då $2y+y^3-2y^3 = y(2-y^2)$, det ger kandidaten $(0,0)$ ($\pm\left(0,\sqrt{2}\right) \notin D$).

fall 2: $y = 0$: (1) ger då $2x+x^3-2x^3 = x(2-x^2)$, det ger nya kandidaterna $\pm\left(\sqrt{2},0\right)$.

fall 3: $xy \neq 0$: (1),(2) är då ekvivalenta med $\begin{cases} (1)\ \ 2+x^2+y^2-(x^2-y^2)2 = 0 \\ (2)\ \ 2+x^2+y^2+(x^2-y^2)2 = 0 \end{cases}$, addition visar att det inte finns nya lösningar.

B) randpunkter: för $y = \pm 1$ får vi

$f(x,\pm 1) = h(x) = \frac{x^2-1}{\left(3+x^2\right)^2}$, $h'(x) = \frac{2x\left(3+x^2\right)^2-\left(x^2-1\right)2\left(3+x^2\right)2x}{\left(3+x^2\right)^4} = 0 \Leftrightarrow x(3+x^2)-(x^2-1)2x =$
$= x(5-x^2) = 0$, alltså $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{5}$ och nya kandidater $\pm(0,1)$, $\pm\left(\sqrt{5},1\right)$ och $\pm\left(\sqrt{5},-1\right)$.

Så, vad nu? Jo, titta först vilka värden vi har fått hittills:
$f(0,0) = 0$, $f\left(\pm\sqrt{2},0\right) = \frac{2}{(2+2)^2} = \frac{1}{8}$, $f(0,\pm 1) = -\frac{1}{9}$, $f\left(\pm\sqrt{5},\pm 1\right) = \frac{4}{(2+5+1)^2} = \frac{1}{16}$. Aha, det största värdet bland dessa är $\frac{1}{8}$, det minsta värdet är $-\frac{1}{9}$. Kan $f(x,y)$ anta mindre/större värden? Svaret är nej, ty $0 \le \lvert f(x,y)\rvert \le \dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{y^2}{x^4}}{\left(\frac{2}{x^2}+1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2} \to 0$ då $x \to \infty$ (för alla $y \in [-1,1]$) och detta ger att det finns ett tal M så att $\lvert f(x,y)\rvert \le \frac{1}{100}$ (t.ex) för alla $(x,y) \in D$ med $\lvert x\rvert \ge M$. Men nu vet vi ju att den kontinuerliga funktionen f antar på den kompakta mängden

$D_M : \begin{cases} -M \le x \le M \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$ ett största resp ett minsta värde, och det måste vara $\frac{1}{8}$ resp $-\frac{1}{9}$ som vi räknat fram ovan, ty på randen ∂D_M är ju $\lvert f(x,y)\rvert \le \frac{1}{100}$; men eftersom $\lvert f(x,y)\rvert \le \frac{1}{100}$ för alla $(x,y) \in D \setminus D_M$ (dvs utanför D_M) så är $\frac{1}{8}$ resp $-\frac{1}{9}$ det största resp det minsta värde som f antar på D.