<u>Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2002-03-11, kl 14.15-18.15</u>
<u>Hjälpmedel</u>: Inga, ej heller räknedosa
<u>Telefon</u>: Niclas Andreasson, tel. 0740 - 459022
<u>OBS</u>: Fyll i <u>allt</u> på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på <u>varje</u> inlämnat blad!

1. Låt $f(x,y) = xy(1+x+y)$.

a) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(1,-2)$ i riktningen $(1,1)$. (2p)

b) Bestäm alla stationära punkter till f och karaktären hos en av dem. (4p)

c) Vilka värden antar f på $D = \{(x,y): 1 \le x \le 2, -1 \le y \le \frac{1}{x}\}$? (4p)

2. Låt $(u,v) = \left(xe^{-y}, xe^{y}\right)$ och $\Omega = \{(x,y): x > 0\}$.

a) Visa att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt injektiv i varje punkt i Ω. (2p)

b) Bestäm en funktion $f(x,y)$ som satisfierar $xf'_x + f'_y = 4x^4$, $f(x,0) = \ln x$ i Ω. (5p)

c) Beräkna arean av det område i Ω som ges av

$$\begin{cases} \ln x \le y \le \ln 2 + \ln x \\ \ln 2 - \ln x \le y \le 3\ln 2 - \ln x \end{cases}.$$

[ledn.: använd u,v...] (4p)

3. Låt $\mathbb{F} = \left(\dfrac{2\sqrt{y}}{1+x^2y}, \dfrac{x}{(1+x^2y)\sqrt{y}} \right)$.

a) Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\{(x,y): y > 0\}$? (2p)

b) Beräkna $\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ där $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (2\cos 2t, 3\sin 3t)$, $\frac{\pi}{4} \xrightarrow{t} \frac{\pi}{6}$. (4p)

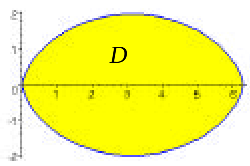
4. Bestäm om möjligt ett rellt tal a så att kroppen

$$\left\{ (x,y,z): 0 \le z < \frac{a}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} - 1 \right\}$$

har volymen 1. (5p)

5. Området D i xy-planet begränsas av kurvorna

$$C_1: \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \cos t - 1 \end{cases}, \quad 0 \xrightarrow{t} 2\pi \quad \text{och} \quad C_2: \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad 2\pi \xrightarrow{t} 0.$$



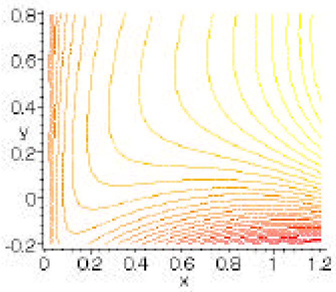
Beräkna arean av D (4p) och längden av ∂D $(= C_1 + C_2)$ (4p). (8p)

6. **a)** Definiera kompakt mängd och enkelt sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^2$. (4p)

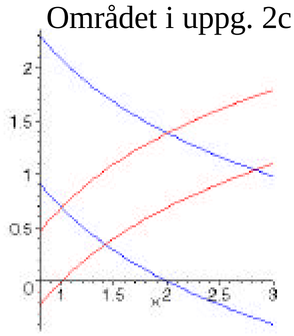
b) Formulera och bevisa ett nödvändigt villkor för att en funktion $f(x,y)$ antar ett lokalt extremvärde under bivillkoret $g(x,y) = 0$. (6p)

BB

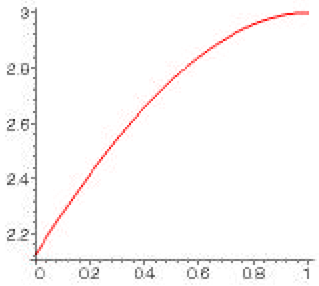
nivåkurvorna till f i uppg. 2b



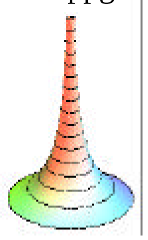
Området i uppg. 2c



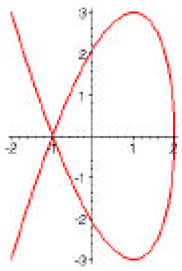
Kurvan i uppg. 3b



Kroppen i uppg. 4

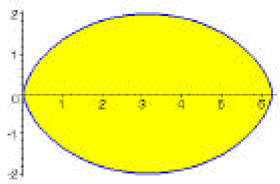


(den är del av kurvan ($-\frac{\pi}{2} \xrightarrow{t} \frac{\pi}{2}$)

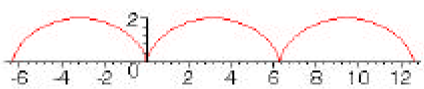


)

Området i uppg. 5



(randen är del av en cykloid



)