**Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2002–08–23, kl. 8.45–12.45**
**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa
**Telefon:** , tel. 0740–459022
**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

---

**1.** Låt $f(x,y) = 3x^3 + y^3 - 2xy$.

**a)** Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,1,2)$. (4p)

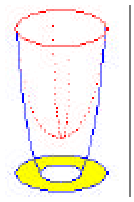
**b)** Visa att origo är en stationär punkt och bestäm dess karaktär. (2p)

**c)** Nivåkurvorna $C_1 : f(x,y) = 2$ och $C_2 : x^4 + 2y^3 + x^2 y = 4$ skär varandra i punkten $(1,1)$. Bestäm vinkeln mellan $C_1$ och $C_2$ i denna punkt. (4p)

**2.** Lös problemet $xf'_x - 3yf'_y = 2x^2 y\sqrt{xy}\sin(xy)$, $f(x,x) = x^2$ $\left(0 < x < \sqrt{\pi}, 0 < y < \sqrt{\pi}\right)$. (6p)

Ledn.: inför nya variabler $u = x\sqrt{xy}$, $v = \cos(xy)$.

**3.** Vilka värden antar potentialen $\Phi(x,y,z) = 6xy - z^3$ på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ? (6p)



**4.** En vas definieras av olikheterna $0 \le 3e^{x^2+y^2} - 4 \le 2z \le 2e^{x^2+y^2}$.

**a)** Hur mycket vatten ryms i vasen? (3p)

**b)** Beräkna vasens totala massa då dess densitet är ñ$(x,y,z) = 1$. (3p)

**5.** Låt $\mathbb{F} = \left(3x^2y^2 + \frac{\sin x}{1+x^2},\ 2y\left(x^3 + e^{-y^4}\right)\right)$.

**a)** Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$ ? (2p)

**b)** Beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas från $(-2,2)$ till $(2,-2)$ medurs längs ellipsen $2x^2 + 3y^2 = 20$. (5p)

**6.** Beräkna ett numeriskt närmevärde för längden av kurvan $y = \frac{1}{3}x^3, -1 \le x \le 1$.

Ledn.: längden ges av en integral som ej är elementär; Maclaurinutveckla dess integrand t.o.m. ordningen 10; feluppskattning krävs ej. (5p)

**7.** **a)** Definiera öppen mängd i $\mathbb{R}^n$. (2p)

**b)** Formulera inversa funktionssatsen. (2p)

**c)** Formulera och bevisa en formel för beräkning av riktningsderivatan av en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i en punkt $(a,b)$ i riktningen $\boldsymbol{v}$. (6p)

BB

**Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2002-03-11, kl 14.15-18.15**
**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa
**Telefon:** Niclas Andreasson, tel. 0740 - 459022
**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

**1.** Låt $f(x,y) = xy(1+x+y)$.

**a)** Beräkna riktningsderivatan av $f$ i punkten $(1,-2)$ i riktningen $(1,1)$. (2p)

**b)** Bestäm alla stationära punkter till $f$ och karaktären hos en av dem. (4p)

**c)** Vilka värden antar $f$ på $D = \{(x,y) : 1 \le x \le 2, -1 \le y \le \frac{1}{x}\}$? (4p)

**2.** Låt $(u,v) = (xe^{-y}, xe^{y})$ och $\Omega = \{(x,y) : x > 0\}$.

**a)** Visa att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt injektiv i varje punkt i $\Omega$. (2p)

**b)** Bestäm en funktion $f(x,y)$ som satisfierar $xf'_x + f'_y = 4x^4$, $f(x,0) = \ln x$ i $\Omega$. (5p)

**c)** Beräkna arean av det område i $\Omega$ som ges av
$$\begin{cases} \ln x \le y \le \ln 2 + \ln x \\ \ln 2 - \ln x \le y \le 3\ln 2 - \ln x \end{cases}.$$
[ledn.: använd $u,v$...] (4p)

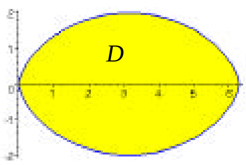
**3.** Låt $\mathbb{F} = \left( \dfrac{2\sqrt{y}}{1+x^2 y}, \dfrac{x}{(1+x^2 y)\sqrt{y}} \right)$.

**a)** Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\{(x,y) : y > 0\}$ ? (2p)

**b)** Beräkna $\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ där $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (2\cos 2t, 3\sin 3t)$, $\frac{\pi}{4} \xrightarrow{t} \frac{\pi}{6}$. (4p)

**4.** Bestäm om möjligt ett rellt tal $a$ så att kroppen
$$\left\{ (x,y,z) : 0 \le z < \frac{a}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} - 1 \right\}$$
har volymen 1. (5p)

**5.** Området $D$ i $xy$-planet begränsas av kurvorna
$$C_1 : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \cos t - 1 \end{cases}, 0 \xrightarrow{t} 2\pi \quad \text{och} \quad C_2 : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 2\pi \xrightarrow{t} 0.$$




Beräkna arean av $D$ (4p) och längden av $\partial D$ $(= C_1 + C_2)$ (4p). (8p)

**6.** **a)** Definiera kompakt mängd och enkelt sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^2$. (4p)

**b)** Formulera och bevisa ett nödvändigt villkor för att en funktion $f(x,y)$ antar ett lokalt extremvärde under bivillkoret $g(x,y) = 0$. (6p)

BB

**Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2002-01-18, kl 8.45-12.45**
**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa
**Telefon:** Fredrik Altenstedt, tel. 0740 - 459022
**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer påvarje inlämnat blad!

---

**1.** Låt $f(x,y) = \left(x^3 - y^4\right)\ln\left(e - 2 + x^4 + y^4\right)$.

**a)** Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,1,0)$. (4p)

**b)** Vilka värden antar $f'_{\boldsymbol{v}}(1,1)$ ( = riktningsderivatan av $f$ i punkten $(1,1)$ i riktningen $\boldsymbol{v}$ ), $\boldsymbol{v} \in \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\right\}$? (3p)

**2.** Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x,y) = x^3 - 2xy + 2y^2$ och avgör deras typ. (6p)

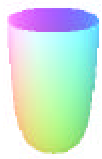
**3.** Låt $\Omega = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\}$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

**a)** Visa att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i $\Omega$. (2p)

**b)** Bestäm en funktion $f(x,y)$ som satisfierar
$x\,f'_x + y\,f'_y - 2f = x^3 y\cos(xy)$, $f(x,\sqrt{x}) = 0$ för $(x,y) \in \Omega$. (6p)

**c)** Beräkna arean av det område i $\Omega$ som begränsas av kurvorna
$y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$, $y = \frac{x}{2}$ och $y = 2x$. (4p)

**4.** Låt $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^2 + \dfrac{2}{2 - x^2 - y^2}$, *l.e.* = längdenhet = *dm*.



**a)** Insidan av ett glas ges av $z = f(x,y)$, $x^2 + y^2 \le 1.21$. Man fyller vatten i glaset tills det står $2\,l.e.$ högt. Hur mycket vatten finns då i glaset? (4p)

**b)** Är $f$ differentierbar i origo? (2p)

**5.** Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F}(x,y) = \left(2y\sqrt{y}\sinh x + x^3,\ 3\sqrt{y}\cosh x + x\right)$ uträttar längs kurvan $C$: $y = \cosh(x)$, $-\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \xrightarrow{x} \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ (4p).
Beräkna även längden av $C$ (3p). (7p)

**6.** Visa att funktionen $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\ln(x+1)}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ är deriverbar i origo. (4p)

**7. a)** Definiera inre punkt till en mängd och öppen mängd. (2p)

**b)** Låt $\mathbb{F}$ vara ett fält som är $C^1$ i $\mathbb{R}^3$. Visa att om kurvintegralen $\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen i $\mathbb{R}^3$ så är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^3$. (6p)

BB

**Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2001-08-24, kl. 12.15-18.15**
**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa
**Telefon:** Anna Nordqvist, tel. 0740 - 459022
**OBS:** Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

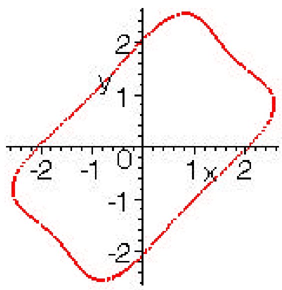
**1.** Låt $F(x,y,z,t)=\dfrac{\arctan(2x-3y+z)+t}{x^2+y^2+z^2+t^2}$
Beräkna riktningsderivatan av $F$ i punkten $(1,1,1,1)$ i riktningen $(-2,-2,1,-1)$.
I vilken riktning växer funktionsvärdena $F(x,y,z,t)$ snabbast i punkten $(1,1,1,1)$? (5p)

**2.** Låt $\Omega=\{(x,y):|x|<\frac{\pi}{2}, 1<y\}$, $u=y-\sin x$ och $v=y\sin x$.
**a)** Visa att $u, v$ duger som nya variabler i $\Omega$. (2p)
**b)** Lös problemet $\tan(x)z'_x - y z'_y = y+\sin(x)$, $z(\frac{\pi}{6},y)=\cosh(\frac{y}{2})-y$, $(x,y)\in\Omega$. (6p)
**c)** Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{y^2-\sin^2 x}{y\tan x}\,dxdy$ där området $D$ ges av olikheterna
$0<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}+\sin x\le y\le 2+\sin x$, $1\le y\sin x\le 2$. (4p)

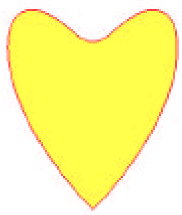
**3.** Beräkna längden av kurvan $y=\ln x$, $1\le x\le\sqrt{3}$. (4p)

**4.** För vilka reella tal $\alpha,\beta$ har $\dfrac{(\tan x - x)^\alpha}{(\tan x + x)^\beta}$ ett gränsvärde då $x$ går mot 0? (4p)

**5.** Låt $F(x,y)=(x-y)^4+2x^2y^2$.
**a)** Bestäm det minsta och det största avståndet mellan origo och en punkt på kurvan $C: F(x,y)=18$. (6p)
**b)** Visa att kurvan $C$ lokalt i punkten $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ är en funktionskurva $y=f(x)$ och ange en ekvation för tangenten till denna kurva i punkten $(\sqrt{3},\sqrt{3})$. (3p)




**6.** Låt $r(\varphi)=2\sqrt{\cos^2(2\varphi)+\sin^2(4\varphi)}$ och
$C: r=r(\varphi)$, $\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\varphi}\frac{3\pi}{4}$ ($r,\varphi$ polära koordinater).



**a)** Beräkna det arbete som kraftfältet $(\sin(2x)\sin(2y), -\cos(2x)\cos(2y))$ uträttar då en partikel förflyttas längs $C$. (2p)
**b)** Beräkna arean av det område som omslutes av $C$. (4p)

**7. a)** Definiera "positivt definit kvadratisk form". (2p)
**b)** Definiera "randpunkt till en mängd $M\subset I\!R^n$". (2p)
**c)** Formulera och bevisa Greens sats. (6p)

BB

**Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 1999-03-08, kl  14.15-18.15**
**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa.
**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat!

---

**1.** Låt $F(x,y,z) = \cosh(xz - yz) + \sinh(x + y - z)$ och $P = (1,1,2)$.

**a)** Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z) = 1$ i punkten $P$. (4p)

**b)** Beräkna riktningsderivatan av $F$ i punkten $P$ i riktningen $\vec{v} = (2,1,2)$. (3p)

**c)** Visa att nivåytan $F(x,y,z) = 1$ lokalt i $P$ är en funktionsyta $z = f(x,y)$. (1p)

**2.** Beräkna längden av kurvan $C : y^2 = x^3,\ 0 \le x \le 1$ [ "Neil's parabel" ]. (4p)

**3.** Bestäm för $0 < |y| < x < 1$ en funktion $z(x,y)$ som är $0$ på Neil's parabel (se uppg.2) och satisfierar $x^3 z'_x + x^2 y z'_y = y^2$

[ledn: inför de nya variablerna $u = x^2 - y^2,\ v = x^2 y^{-2}$ ] . (6p)

**4.** Betrakta kroppen $K = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 2500,\ 0 \le z \le 15 + \frac{x^2}{500}\right\}$.

**a)** Beräkna $K$:s volym. (4p)

**b)** Klockan 12 en vacker vårdag var temperaturen i en punkt $(x,y,z)$ på $K$:s tak $T(x,y,z) = 10^{-3}\left(y^2 - xy + 500z\right)$ [$^{\circ}$ Celsius].
Mellan vilka värden varierade temperaturen på $K$:s tak då? (6p)
[ $K$:s tak är ytan $\left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 2500,\ z = 15 + \frac{x^2}{500}\right\}$ ]

**5.** Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F}(x,y,z) = (y - z, z - x, -xy)$ uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan

$$C : \begin{cases} x = 50\cos t \\ y = 50\sin t \\ z = 15 + 5\cos^2 t \end{cases},\ -\eth \xrightarrow{t} \eth .$$ (5p)

**6.** Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är $C^3$ i $D : x^2 + y^2 < 1$

och funktionen $\dfrac{f(x,y) - 1 + x^2 + 4xy + 7y^2}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}}$ är begränsad i $D$.

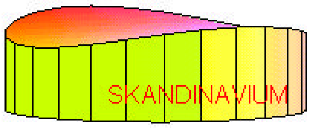
Visa att origo är en stationär punkt till $f$ och avgör dess karaktär. (5p)

**7. a)** Vad menas med att en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i $(a,b)$? (2p)

**b)** Definiera konservativt kraftfält. (2p)

**c)** Formulera Taylors formel för en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (2p)

**d)** Formulera och bevisa Greens sats. (6p)

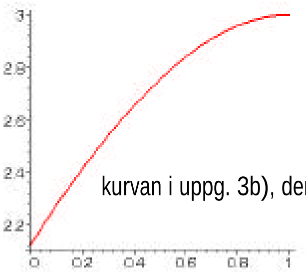
Kroppen $K$ (uppgift 4, 5): 


BB

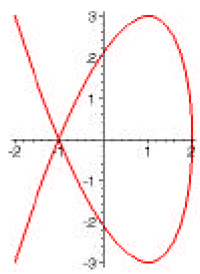
## Svar (gamla del C-tentor)

| |
|---|
| **02-08-23:**<br>**1a)** $7x+y-z=6$ **b)** sadelpunkt **c)** $\arccos\frac{49}{5\sqrt{170}}=\arctan\frac{6}{7}-\arctan 7$<br>**2)** $f(x,y)=x\sqrt{xy}\left(1+\cos(xy)-\cos\left(x\sqrt{xy}\right)\right)$ **3)** $[-15,15]$ **4a)** $\pi(8\ln 2-3)$ **b)** $\pi(2\ln 3-1)$<br>**5a)** ja **b)** 64 **6)** $\frac{391}{180}$ |
| **02-03-11:**<br>**1a)** $-2\sqrt{2}$ **b)** stationära punkter: $(0,0)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ (sadelpkt), $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ (lok. maxpkt)<br>**c)** $\left[-4,\frac{7}{2}\right]$ **2b)** $f(x,y)=x^4\left(1-e^{-4y}\right)+\ln x-y$ **c)** $2\left(\sqrt{2}-1\right)$ **3a)** ja **b)** $\frac{2\pi}{3}$<br>**4)** $a=\sqrt[4]{\frac{3}{\pi}}$ **5a)** $m(D)=6\pi\ a.e.$ b) $m(\partial D)=16\ l.e.$ |
| **02-01-18:**<br>**1a)** $3x-4y-z=-1$ **b)** $[-5,5]$ **2)** $(0,0)$: sadelpunkt, $(\frac{1}{3},\frac{1}{6})$: lok. minimipunkt<br>**3b)** $f(x,y)=\frac{x^2}{2}\left(\sin xy-\sin\left(\frac{x}{y}\right)^3\right)$ **c)** $2\ln 2\ a.e.$ **4a)** $\frac{2\pi}{3}(4-3\ln 2)\ dm^3$ **b)** ja<br>**5)** arbetet är $2(2\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3})$, kurvans längd är $2\sqrt{3}\ l.e.$ |
| **01-08-24:**<br>**1a)** $F'_v(1,1,1,1)=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $F$ växer i punkten $(1,1,1,1)$ snabbast i riktningen $(3,-7,1,1)$<br>**2b)** $z(x,y)=\sin x+\cosh(y\sin x)-y-\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{7}{8}\ln 2$ **3)** $2-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{6}-\sqrt{3})$<br>**4)** $\beta\le 3\alpha$ **5a)** $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{3\sqrt{6}}$ **b)** $x+y=2\sqrt{3}$ **6a)** 0 **b)** $\pi$ |
| **99-03-08:**<br>**1a)** $z=x+y$ **b)** $\frac{1}{3}$ **2)** $\frac{2}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)$ **3)** $z(x,y)=\frac{y^2}{x^2}\ln\frac{x^3}{y^2}$<br>**4a)** $40625\pi$ **b)** $[\,7.5^{\circ}, 11.25^{\circ}\,]$ **5)** $1250\pi$ **6)** lok. maximipunkt |

Till tentan 02-03-11:




kurvan i uppg. 3b), den är del av




$\left(-\frac{\pi}{2}\xrightarrow{t}\frac{\pi}{2}\right)$

kroppen i uppg. 4

# Lycka till

Bernhard