INSTUDERINGSUPPGIFTER

- Dessa uppgifter skall hjälpa dig vid inlärningen, de skall fungera som ett slags diagnostiskt prov: (hur bra) kan du redan det vi har gått igenom den gångna veckan? Försök först att lösa uppgifterna hemma, skriv ner dina lösningar på ett bra sätt, ta med dem till räknestugan och diskutera dem i smågrupp: är lösningen korrekt? fullständig? bra nerskriven? omständlig? är alla använda begrepp/satser klara? Det viktigaste är inte att du har en korrekt lösning utan att du jobbar bra med uppgifterna! Diskutera då även föreläsningarna, repetitionsfrågorna (de liknar teorifrågorna på tentan och frågorna på "muntan" efter hela ettans matte) och extraövningarna.
- Tänk på att du måste träna att formulera dig, att skriva ner en lösning på ett acceptabelt sätt. Uppgifterna är eller liknar tenta-uppgifter.
- Gå igenom lösningarna (kritiskt), men först **efter** det att du har försökt.

Instuderingsuppgift 1

a) Given är kurvan $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (t,\, t^2-4,\, t),\ -2 \xrightarrow{t} 2$.
Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F} = (xy+z,\ \sin x + \sinh y + \cos z,\ xyz)$ uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan C.
Beräkna även längden av kurvan C.

b) Är funktionen $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y)}{xy^2}, & \text{då } xy \neq 0 \\ 0, & \text{då } xy = 0 \end{cases}$ kontinuerlig resp. part. deriverbar i origo?

Instuderingsuppgift 2

a) Är funktionen $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 y)}{xy^2}, & \text{då } xy \neq 0 \\ 0, & \text{då } xy = 0 \end{cases}$ differentierbar?

b) Låt $F(x,y,z) = \sin(ye^x) + e^{x+2y+4z}$.
- I vilken riktning avtar F snabbast i origo?
- Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan Y: $F(x,y,z) = 1$ i origo, först direkt (med F), sedan genom att beskriva Y som en funktionsyta $z = f(x,y)$ nära origo.

c) Bestäm en funktion $z(x,y)$ som satisfierar $xz'_x - yz'_y = 2$ och $z(x,x) = x^2$ för $(x,y) \in D = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ (ledn.: inför de nya variablerna $u = \arctan(xy)$, $v = \frac{x}{y}$).

Instuderingsuppgift 3

Funktionen f definieras genom $f(0)=1$ och $f(x)=\dfrac{\arctan x}{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$ för $0<|x|<1$.

Visa att funktionen är deriverbar i 0.

Instuderingsuppgift 4

a) Låt $u=\arctan(xy)$, $v=\dfrac{x}{y}$ för $(x,y)\in D=\{(x,y):x>0,y>0\}$ (problem 2c).
Visa att tillordningen $(x,y)\mapsto(u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i D.

b) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)=\ln|2x-1|+\ln|y|+xy-x$
och deras karaktär.

c) Bestäm värdemängden till funktionen $f(x,y)=\dfrac{1+2x+2y}{1+x^2+y^2}$, $D_f=\mathbb{R}^2$.

Instuderingsuppgift 5

a) Beräkna volymen av den kropp som begränsas
nedåt av konen $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ och
uppåt av sfären $x^2+y^2+(z-1)^2=2$ ("glassmängden").

b) Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{e^{2x}}{y(e^{2x}+1)}\,dxdy$, då D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y=2e^{-x}$, $y=3e^{-x}$, $y=\cosh x$ och $2y=\cosh x$.

Instuderingsuppgift 6

a) Låt $\mathbb{F}=\left(\dfrac{4x+2y^2-1}{1+(2x+y^2)^2},\dfrac{4xy+2y^3-y}{1+(2x+y^2)^2}\right)$.
Visa att $\mathbb{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ och beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs spiralen $C:\begin{cases}x=\sqrt{e^{-t}}\cos t\\ y=\sqrt{e^{-t}}\sin t\end{cases}$, $0\xrightarrow{t}3\pi$.

b) Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C \tfrac{1}{x}\arctan\tfrac{y}{x}\,dx-\arctan\tfrac{y}{x}\,dy$ där C är den positivt orienterade randen till det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=x$, $y=\sqrt{3}\,x$.

EXTRAUPPGIFTER

1. Låt $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Vi har definierat: M är *öppen* om varje punkt i M är inre punkt i M och M är *sluten* om $\mathbb{R}^n \setminus M$ är öppen. Visa:
M är sluten $\Leftrightarrow$ $\partial M \subseteq M$ (kursbokens definition).

2. Domkyrkan i Ulm har ett $161m$ högt torn med en spiraltrappa som man kan gå upp i. Hur lång tid tar det dig att nå utsiktsplattformen på $150m$ höjd, om du startar i punkten $(\sqrt{3},0,0)$ och går $1km/h$ längs gånglinjen $\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, t)$?

3. Beräkna längden av parabelbågen $y = x^2$ mellan $(1,1)$ och $(2,4)$.

4. Visa att för ett polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ gäller $a_k = \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$ för $k = 0,1,2,\cdots,n$.

5. Ange Maclaurinpolynomet av grad 8 till $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x^2)}$. Gör tre lösningar:

(1) med ansättningen $f(x) = \sum_{k=0}^{8} a_k x^k + \cdots$, (2) med $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots$ och

(3) med "lång division".

6. Visa att funktionen $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ är C^1 i $|x| < \pi$.

7. Beräkna $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{x} - \dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{\sinh x} \right)$.

8. Visa att för positiva reella tal x, y, z gäller: $xyz = a^3 \Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z) \geq (1+a)^3$.

9. Ett plåtkärl har formen av ett rätblock. Plåten i bottenytan kostar 2 öre/cm2 och i de övriga fem sidorna 1 öre/cm2. Vilka mått skall kärlet ha för att rymma maximal volym, då den totala plåtkostnaden uppgår till 36 öre?

10. I vilka punkter på ellipsoiden $Y: (x-y)^2 + 2y^2 + 4z^2 = 6$ är det elektriska fältet starkast, resp. svagast, då den elektriska potentialen i punkten (x,y,z) är $\Phi(x,y,z) = x^2 - \sqrt{2}\,y^2 + \sqrt{6}\,z^2$ (du skall alltså bestämma de punkter på Y i vilka $|-grad\Phi(x,y,z)|$ antar sitt största, resp. sitt minsta värde).

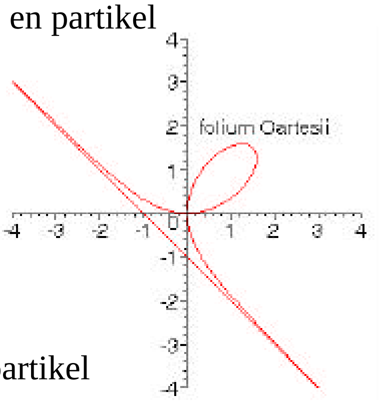
11. Kroppen K begränsas av xy-planet och ytan $z = 20 - 2x^2 - 3y^2$.
Genom K borras ett cylindriskt hål med z-axeln som borraxel och radien R.
Bestäm R så att den återstående kroppen har hälften så stor volym som K (bortborrad massa = kvarvarande massa).

12. Beräkna $\iint_D e^{xy-x^2-y^2}\,dxdy$ då D är första kvadranten i xy-planet.

13. För vilken enkel, sluten C^1-kurva C uträttar kraftfältet $\left(x^2y+y^3-12y,\,24x-x^3-6xy^2\right)$ det största arbete, då en partikel förflyttas ett varv moturs längs C?

14. Beräkna arean av området inom öglan av kurvan

$$C:\begin{cases} x=\frac{3t}{1+t^3} \\ y=\frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases},\ -1\neq t\in \mathbb{R} \quad \text{(Descartes' blad).}$$

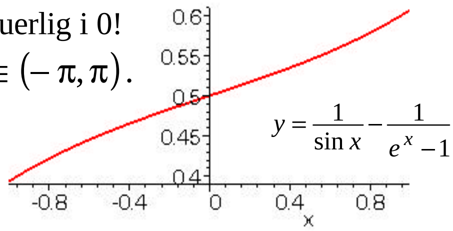


15. Beräkna det arbete som kraftfältet $\left(2x+3y+xe^{x^2+y^2},\ 2x+3y+ye^{x^2+y^2}\right)$ uträttar då en partikel förflyttas från $(0,0)$ till $(\pi,0)$ längs kurvan $y=\sin x$.

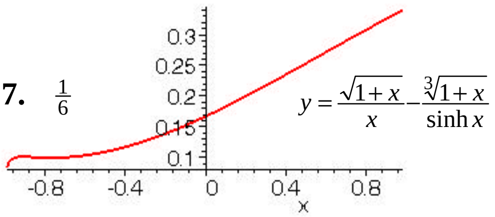
svar till extrauppgifterna:

2. 18 minuter **3.** $\sqrt{17}-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{4}\ln\left(\left(\sqrt{17}-4\right)\left(\sqrt{5}+2\right)\right)$ **5.** $f(x)=1+\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{5x^8}{24}+x^8o(1)$

6. Visa först att $f'(0)=\frac{1}{12}$, sedan att f' är kontinuerlig i 0! Glöm ej att motivera varför f är C^1 i $0\neq x\in(-\pi,\pi)$.



7. $\frac{1}{6}$



9. $2cm\times 2cm\times 3cm$

10. störst i $\pm\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0\right)$, minst i $\pm(1,-1,0)$

11. $R=\sqrt{8-\sqrt{64-\dfrac{80}{\sqrt{6}}}}$ **12.** $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ **13.** ellipsen C: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

14. $\dfrac{3}{2}$ Du får hela lösningen sid. 9 **15.** $2+\pi^2+\frac{1}{2}e^{\pi^2}$