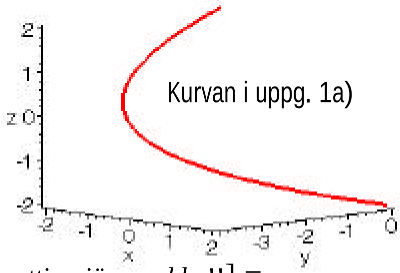
Lösningsförslag till instuderingsuppgift 1



a) $A=\int_C \mathbb{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{-2}^{2} \mathbb{F}\bullet \mathbf{r}'dt =$

$= \int_{-2}^{2}\left(t(t^2-4)+t, \sin t+\sinh(t^2-4)+\cos(t),\ t(t^2-4)t\right)\bullet(1,2t,1)\,dt =$

$= \int_{-2}^{2}\left(t(t^2-4)+t+\left(\sin t+\sinh(t^2-4)+\cos t\right)2t+t^2\left(t^2-4\right)\right)dt =$ [utnyttja *jämn-udda* !!] =

$= 2\int_{0}^{2}\left(2t\sin t+t^4-4t^2\right)dt = 2\left[2(\sin t - t\cos t)+\frac{1}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3\right]_0^2 = 2\left(2\sin 2-4\cos 2+\frac{32}{15}(3-5)\right).$

$L=\int_C ds = \int_{-2}^{2}|\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_{-2}^{2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt = \int_{-2}^{2}\sqrt{1+(2t)^2+1}\,dt = 2\int_0^2\sqrt{2\left(1+2t^2\right)}\,dt =$

$= \left[\sqrt{2}t=u\right] = 2\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+u^2}\,du = [\text{se nedan}] = \left[u\sqrt{1+u^2}+\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^{2\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}+\ln\left(2\sqrt{2}+3\right).$

Arbetet är alltså $\underline{\frac{4}{15}(15\sin 2-30\cos 2-32)}$ och längden $\underline{6\sqrt{2}+\ln(2\sqrt{2}+3)}$.

[Repetition: den integral du får för att beräkna längden i uppg.1a) bör du kunna (del A!):
antingen du börjar med partiell integration: $\int\left(1+x^2\right)^{\frac12}dx = x\left(1+x^2\right)^{\frac12}-\int\frac12 x\left(1+x^2\right)^{-\frac12}2x\,dx =$
$= x\left(1+x^2\right)^{\frac12}-\int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int\left(1+x^2\right)^{\frac12}dx$ osv.,
eller (fiffigast) du substituerar $x=\sinh t$:
$\int\sqrt{1+x^2}\,dx = \int\cosh t\cosh t\,dt = \frac12\left(t+\frac12\sinh 2t\right) = \frac12\left(t+\sinh t\cosh t\right) = \frac12\left(\sinh^{-1}x + x\sqrt{1+x^2}\right)$.]

b) f är ej kontinuerlig i origo, ty t.ex. går $f(x,x)$ ej mot $f(0{,}0)=0$ då x går mot 0:

$f(x,x)=\frac{\sin\left(x^3\right)}{x^3}\to 1$ då $(x,x)\to(0,0)$.

Men f är deriverbar (även) i origo, ty $\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0\to 0$ då $h\to 0$ och
$\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\frac{0-0}{k}=0\to 0$ då $k\to 0$ (dvs. $f'_x(0{,}0)=f'_y(0{,}0)=0$).

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 2

a) Nej, ty f är ej kontinuerlig i origo (differentierbarhet medför ju kontinuitet)!

b) Svaren fås med gradientvektorn:
$gradF = \left(ye^x\cos\left(ye^x\right)+e^{x+2y+4z},\ e^x\cos\left(ye^x\right)+2e^{x+2y+4z},\ 4e^{x+2y+4z}\right)$, alltså $gradF(0{,}0{,}0)=(1{,}3{,}4)$
och vi får: F avtar snabbast i riktningen $\underline{-(1{,}3{,}4)}$ och tangentplanet har ekvationen
$gradF(0{,}0{,}0)\bullet(x-0,y-0,z-0)=0$, alltså $\underline{x+3y+4z=0}$.
Vi kan också lokalt kring origo lösa ut z:
$e^{x+2y+4z}=1-\sin\left(ye^x\right)\Rightarrow z=\frac14\left(\ln\left(1-\sin\left(ye^x\right)\right)-x-2y\right)=f(x,y)$ och tangentplanet fås nu
som $z=f(0{,}0)+f'_x(0{,}0)x+f'_y(0{,}0)y$ där $gradf=\frac14\left(\frac{-ye^x\cos\left(ye^x\right)}{1-\sin\left(ye^x\right)}-1,\frac{-e^x\cos\left(ye^x\right)}{1-\sin\left(ye^x\right)}-2\right)$,
alltså $gradf(0{,}0)=\frac{-1}{4}(1{,}3)$ och det ger samma svar s.o..

c) $xz'_x - yz'_y = x\left(z'_u u'_x + z'_v v'_x\right) - y\left(z'_u u'_y + z'_v v'_y\right) = \frac{xy-yx}{1+x^2y^2} z'_u + 2\frac{x}{y} z'_v = 2vz'_v \overset{!}{=} 2$, denna differentialekvation har den allmänna lösningen $z(u,v) = \ln v + g(u)$ (g en godt. C^1-funkt.), dvs. (back to x,y): $z(x,y) = \ln\frac{x}{y} + g(\arctan(xy)) = \ln x - \ln y + f(xy)$ (f en godt. C^1-funkt.). Nu skall $z(x,x) = f\left(x^2\right) = x^2$, det ger $f(t) = t$ och svaret $\underline{z(x,y) = \ln x - \ln y + xy}$.

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 3

Nämnaren (= $\tanh^{-1}(x)$!!) har (den enkla) Maclaurinutvecklingen
$\frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 o(1)\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3 o(1)\right)\right) = x + \frac{x^3}{3} + x^3 o(1)$.

Vi skall undersöka om $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\arctan x - \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))}{x\frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))}$ har ett gränsvärde då x går mot 0. Vi Maclaurinrutvecklar, först nämnaren med bara en term, sedan täljaren t.o.m. samma grad:

$$\frac{\arctan x - \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))}{x\frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))} = \frac{x + x^2 o(1) - \left(x + x^2 o(1)\right)}{x^2 + x^2 o(1)} = \frac{x^2 o(1)}{x^2 + x^2 o(1)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 ,$$

det visar att f är deriverbar i 0 med $f'(0) = 0$.

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 4

a) $\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{y}{1+x^2y^2} & \frac{x}{1+x^2y^2} \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{-x}{y\left(1+x^2y^2\right)} \neq 0$ i D, inversa funktionssatsen ger påstående.

b) $\begin{cases} f'_x = \frac{2}{2x-1} + y - 1 = 0 & \Rightarrow \frac{2}{2x-1} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{3-2x}{2x-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) = 0 \\ f'_y = \frac{1}{y} + x = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{x} & \Uparrow \end{cases}$,

det ger de stationära punkterna (1,-1) och (-½ ,2). Deras typ avgörs (ev.) m.h.a. den kvadratiska formen $Q(h,k) = f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2$: $f''_{xx} = \frac{-4}{(2x-1)^2}$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = \frac{-1}{y^2}$;

i punkten (1,-1): $Q(h,k) = -4h^2 + 2hk - k^2 = -\left((k-h)^2 + 3k^2\right)$ är negativt definit,

i punkten (-½ ,2): $Q(h,k) = -h^2 + 2hk - \frac{1}{4}k^2 = -(h-k)^2 + \frac{3}{4}k^2$ är indefinit,

därmed är svaret: <u>(1,-1) är lokal maximipunkt</u>, <u>(-½ ,2) är sadelpunkt</u>

c) $\begin{cases} f'_x = \frac{2\left(1+x^2+y^2\right) - 2x(1+2x+2y)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} = 0 \\ f'_y = \frac{2\left(1+x^2+y^2\right) - 2y(1+2x+2y)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = y$ (subtrahera!), och det ger de stationära punkterna

$(-1,-1)$ och $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ med $f(-1,-1) = -1$ och $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2$. Om vi räknar med polära koordinater så ser vi att $0 \le |f(x,y)| = \dfrac{|1 + 2r\cos\varphi + 2r\sin\varphi|}{1+r^2} < \dfrac{1+4r}{r^2} < \dfrac{5}{r} \le 1$ då $r \ge 5$.

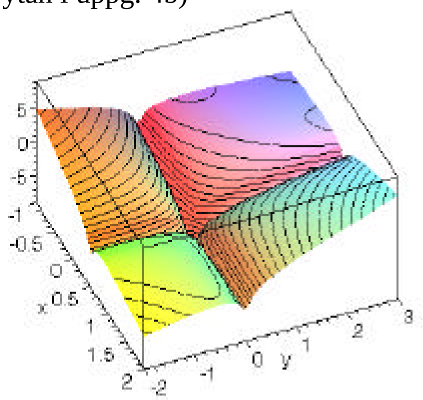
På den kompakta cirkelskivan $\Omega : x^2 + y^2 \le 25$ (t.ex.) antar den kontinuerliga funktionen f ett största och ett minsta värde (sats 4, sid. 33) och måste göra det i det inre av Ω (ty på randen är $|f| < 1$), alltså i en stationär punkt (ty f är C^1), men de enda möjliga punkterna är $(-1,-1)$ och $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (som vi visat ovan), alltså är -1 det minsta värde som f antar och 2 det största värde som f antar. Eftersom $\mathbb{R}^2$ är bågvis sammanhängande och f kontinuerlig så antar f också alla värden mellan -1 och 2 (somv, sats 6 sid. 34). Svaret är därmed $\underline{V_f=[-1,2]}$.

<u>ANM</u>.: I linjär algebra visas att för en kvadratisk form $Q(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2$ gäller:

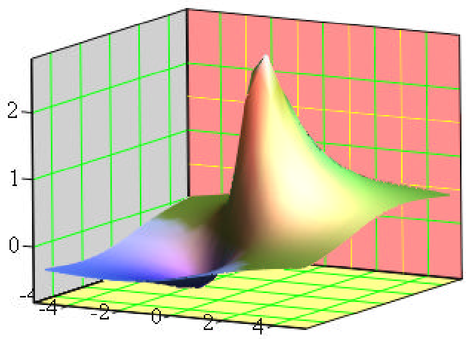
$$Q \text{ är } \begin{cases}\text{positivt definit}\\ \text{negativt definit}\\ \text{indefinit}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2 \begin{cases}>0 \text{ och } A>0\\ >0 \text{ och } A<0\\ <0\end{cases} \Leftrightarrow \text{egenvärdena till} \begin{bmatrix}A & B\\ B & C\end{bmatrix} \text{är} \begin{cases}\text{alla } >0\\ \text{alla } <0\\ \text{ett} >0, \text{ett} <0\end{cases}$$

[egenvärdena till $\begin{bmatrix}A & B\\ B & C\end{bmatrix}$ är rötterna till polynomet $\begin{vmatrix}A-\lambda & B\\ B & C-\lambda\end{vmatrix}$].

ytan i uppg. 4b)



ytan i uppg. 4c)



Lösningsförslag till instuderingsuppgift 5

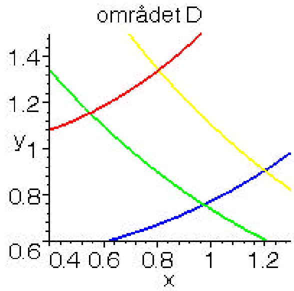
a) Beräkna först snittet mellan konen och sfären, antingen genom att sätta in $x^2+y^2=\frac{1}{4}z^2$ från konen i sfären, det ger $\frac{1}{4}z^2+(z-1)^2=2 \Rightarrow z^2-\frac{8}{5}z=\frac{4}{5} \Rightarrow \cdots \Rightarrow z=2$, eller genom att sätta in $z=2\sqrt{x^2+y^2}=2r$ från konen i sfären, det ger $r^2+(2r-1)^2=2 \Rightarrow r^2-\frac{4}{5}r=\frac{1}{5} \Rightarrow \cdots \Rightarrow r=1$.
Kroppen $K=\left\{(x,y,z):(x,y)\in D,\ 2\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1+\sqrt{2-x^2-y^2}\right\}$, med $D: x^2+y^2\le 1$, har då volymen $m(K)=\iint\limits_D \left(1+\sqrt{2-x^2-y^2}\right)dx\,dy-\iint\limits_D \left(2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy=$ [pol. koord.]

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1+\sqrt{2-r^2}-2r\right)r\,dr\,d\varphi=2\pi\int_0^1\left(r+r\sqrt{2-r^2}-2r^2\right)dr=\pi\left[r^2-\tfrac{2}{3}\left(2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{4}{3}r^3\right]_0^1=\underline{\tfrac{\pi}{3}\left(4\sqrt{2}-3\right)}.$$

b) Gör variabelsubstitutionen $\begin{cases}u=\frac{\cosh x}{y}\\ v=ye^x\end{cases}$, då avbildas D på $D': \begin{cases}1\le u\le 2\\ 2\le v\le 3\end{cases}$, funktionaldeterminanten är $\begin{vmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\sinh x}{y} & \frac{-\cosh x}{y^2}\\ ye^x & e^x\end{vmatrix}=\frac{e^x}{y}(\sinh x+\cosh x)=\frac{e^{2x}}{y}=\frac{1}{\frac{d(x,y)}{d(u,v)}}$ (>0), alltså blir

$$\iint\limits_D \frac{e^{2x}}{y\left(e^{2x}+1\right)}\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} \frac{1}{e^{2x}+1}\,du\,dv = \left[e^{2x}+1 = ye^{x}\ \frac{e^{x}+e^{-x}}{y}\right] =$$

$$= \int_2^3\int_1^2 \frac{1}{2vu}\,du\,dv = \tfrac12\,[\ln v]_2^3\,[\ln u]_1^2 = \underline{\tfrac12\ \ln 2\ln\tfrac32}\,.$$



Lösningsförslag till instuderingsuppgift 6

a) "Upptäck" att $\mathbb{F}$ är konservativt, antingen genom att visa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4xy+2y^3-y}{1+\left(2x+y^2\right)^2}\right) = \frac{4y\left(1+\left(2x+y^2\right)^2\right)-\left(4x+2y^2-1\right)4y\left(2x+y^2\right)}{\left(1+\left(2x+y^2\right)^2\right)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4x+2y^2-1}{1+\left(2x+y^2\right)^2}\right),$$ eller

genom att bestämma en potential Φ:

$$\Phi'_x = \frac{4x+2y^2}{1+\left(2x+y^2\right)^2} - \frac{1}{1+\left(2x+y^2\right)^2} \Rightarrow \Phi(x,y) = \tfrac12\ln\left(1+\left(2x+y^2\right)^2\right) - \tfrac12\arctan\left(2x+y^2\right) + f(y),\ f\equiv 0$$

duger. Arbetet kan då beräknas som "potentialskillnaden"

$$\Phi\left(-\sqrt{e^{-3\pi}},0\right)-\Phi(1,0) = \tfrac12\left(\ln\left(1+4e^{-3\pi}\right)-\ln 5+\arctan 2+\arctan\left(2e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)\right),$$

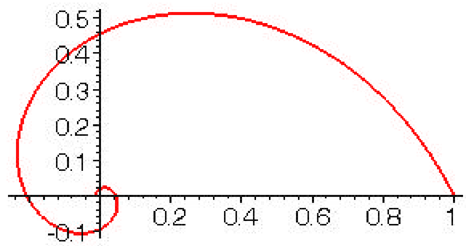
eller genom att välja en enklare väg ($\mathbb{F}$ är C^1 överallt), t.ex. sträckan längs x-axeln:

$y=0,\ x=t,\ 1\xrightarrow{t}-\sqrt{e^{-3\pi}}$, arbetet är då

$$\int_1^{-\sqrt{e^{-3\pi}}} \frac{4t-1}{1+4t^2}\,dt = \tfrac12\left[\ln\left(1+4t^2\right)-\arctan(2t)\right]_1^{-e^{-\frac{3\pi}{2}}} = \underline{\tfrac12\left(\ln\left(1+4e^{-3\pi}\right)-\ln 5+\arctan 2+\arctan\left(2e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)\right)}$$

som ovan.

Kurvan är en spira



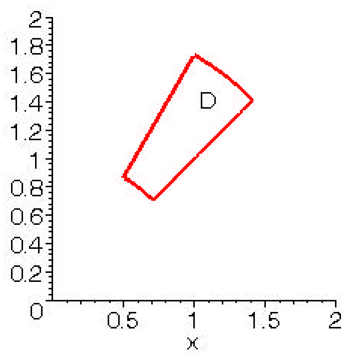
b) Naturligtvis använder vi Greens formel ($\mathbb{F} = (P(x,y),Q(x,y)) = \left(\frac1x\arctan\frac yx,\ -\arctan\frac xy\right)$ är C^1 i en öppen mängd som innehåller området D som delmängd, orienteringen (positivt = moturs) är den rätta; tyvärr är $\mathbb{F}$ ej konservativt, då vore kurvintegralen längs ∂D noll):

$$\int\limits_{\partial D} P\,dx+Q\,dy = \iint\limits_D \left(Q'_x-P'_y\right)dx\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\right)dx\,dy = [\text{pol. koord.}] =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_1^2 \left(\frac{r\sin\varphi}{r^2}-\frac{1}{r^2}\right) r\,dr\,d\varphi = \int_1^2 \left[-\cos\varphi-\tfrac1r\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dr =$$

$$= \int_1^2 \left(\left(\tfrac{1}{\sqrt2}-\tfrac12\right)-\left(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\pi}{4}\right)\tfrac1r\right)dr = \underline{\frac{\sqrt2-1}{2}} \underline{-\frac{\pi\ln 2}{12}}\,.$$

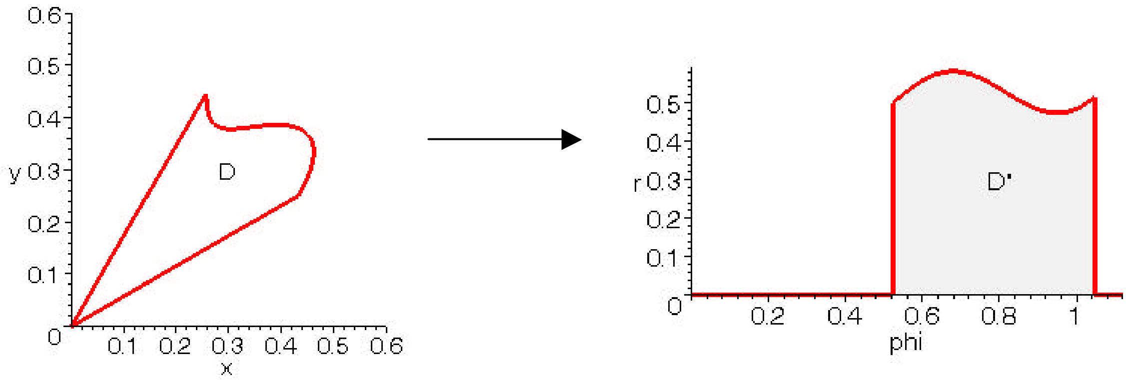
Området D:



ANMÄRKNING

Lösning till extrauppgift 14:

Allmänt: Ett område D i xy-planet som beskrivs med polära koordinater av
$\alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le r \le f(\varphi)$ blir i $j\ r$-planet D':



För arean av D fås då den välkända formeln:

$$\underline{m(D)} = \iint_D dx\,dy = [\text{pol. koord.}] = \iint_{D'} r\,dr\,d\varphi = \int_\alpha^\beta \int_0^{f(\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \underline{\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\varphi))^2\,d\varphi}\,.$$

Ex: Descartes' ögla har den polära framställningen $r = \dfrac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, dess area

är alltså $\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}\right)^2 d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\varphi}{(\tan^3\varphi+1)^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{9}{2}\left[\frac{-1}{1+\tan^3\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\tfrac{3}{2}}$ (generaliserad integral!).

Du har förstås löst uppgiften med Green:

$$\iint_D dx\,dy \underset{\text{Green}}{=} \int_{\partial D} (-y)\,dx = \left[\partial D : \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3},\ dt = \frac{3(1+t^3-3t^3)}{(1+t^3)^2} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases},\ 0 \xrightarrow{t} \infty \right] = -9\int_0^\infty \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt = \left[\begin{array}{l} t^3 = u \\ 3t^2 dt = du \end{array}\right] =$$

$$= 3\int_0^\infty \frac{-1+2x}{(1+x)^3}\,dx = 3\int_0^\infty \left(\frac{2}{(1+x)^2} - \frac{3}{2(1+x)^3}\right)dx = 3\left[\frac{2}{1+x} - \frac{3}{2(1+x)^2}\right]_0^\infty = \underline{\tfrac{3}{2}}\,.$$

Lika bra går $\displaystyle\iint_D dx\,dy = \int_{\partial D} x\,dy$ eller (enklast?) $\displaystyle\iint_D dx\,dy = \tfrac{1}{2}\left(\int_{\partial D} (-y)\,dx + x\,dy\right)$.