Datorlaborationer i matematiska metoder E1, del C, vt 2003

1. Laborationerna är ej obligatoriska.
2. Laborationerna genomförs individuellt. Grupparbete godkänns ej.
3. Laborationerna består av 3 uppgifter. Förtjänstfullt utförda lösningar kan ge bonuspoäng (en per uppgift) vid tentamina i matem. met. del C, 10/3, 20/8 och januari 2004.
4. Lösningarna skall göras angiven vecka och lämnas in hophäftade till mig fr 21/2 kl. 15.00.
5. Skriv namn och personnummer längst upp på varje inlämnat blad, blad utan namn eller utan personnummer rättas ej. Lösningarna lämnas tillbaka med del C-tentan.

Syfte
Att öka förståelsen för kursens olika moment genom att lära dig att utnyttja datorn för att
- se kurvor och ytor i planet och i rummet, gradientfält, nivåkurvor
- se hur bra Taylorpolynomet (av en eller två variabler) approximerar funktioner

Upgift 1 (funktionsytor, gradientfält) [skall göras v 5/6]

a) Rita en funktionsyta $z = f(x,y)$ tillsammans med nivåkurvorna i ytan samt deras projektion i xy-planet. Välj bland följande funktioner (från *DERIVE*):

$-\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}$ (a pagoda roof), $\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}$ (a ridge intersecting a valley),

$\dfrac{55}{50+\left(\sqrt{x^2+y^2}-3.8\right)^2}-1$ (a volcano), $-\dfrac{y}{8+x^2+y^2}$ (a mountain and a crater),

$y\left(3x^2-y^2\right)$ (a monkey saddle), $e^{\frac{-x}{9}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(y)\right)$ (a surfer's perfect wave).

b) Låt $f(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ (a cliff is born).
Visa utan dator att $f(x,y)$ saknar gränsvärde då $(x,y)\to(0,0)$.
Rita funktionsytan $z = f(x,y)$ med nivåkurvorna i ytan, och sedan endast nivåkurvorna i xy-planet, så att du ser (förstår) bättre vad som händer nära origo.

c) Låt $f(x,y)=\dfrac{6\pi\cos\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2\right)}{x^2+y^2+\pi}$ (sombrero). Rita i samma figur ytan $z = f(x,y)$, $x^2+y^2\le(4.4)^2$ och tangentplanet till ytan i punkten $(-1,1,f(-1,1))$.
Rita även nivåkurvorna och gradientfältet till f för $|x|\le 5, |y|\le 5$ i en separat figur.

Uppgift 2 (kurvor, arbete) [skall göras v 5/6]

Betrakta kurvan C: $\begin{cases} x = (a + b\cos qt)\cos pt, \\ y = (a + b\cos qt)\sin pt, \quad 0 \xrightarrow{t} 2\pi \quad \text{(torusknot)}, \\ z = c\sin qt \end{cases}$

då a,b,c,p,q ges av ditt personnummer enligt anvisningarna.

a) Rita C.

b) Beräkna det arbete som kraftfältet $(x - yz,\ xy + z,\ xz + y)$ uträttar då en partikel förflyttas från $(x(0), y(0), z(0))$ till $\left(x(\sqrt{2}), y(\sqrt{2}), z(\sqrt{2})\right)$ längs C, resp. längs en rät linje.

c) Beräkna längden av kurvbågen mellan $(x(0), y(0), z(0))$ och $\left(x(\sqrt{2}), y(\sqrt{2}), z(\sqrt{2})\right)$.

Upgift 3 (Taylorutveckling) [skall göras v 6/7]

Låt $f(x) = 3\sin(2x) - 2\cos(3x)$ och P_n = Maclaurinpolynomet till f av grad n.

a) Rita f och P_n för $n = 5,10,15,20$ i samma plot för $-3 \le x \le 4$.

b) Pröva dig fram till ett n så att P_n är en bra approximation av f för $|x| \le 4$.

c) Pröva dig fram till det största a så att P_{69} är en bra approximation för f för $|x| \le a$. (a skall anges med en decimal).

d) Låt $f(x, y) = y\ln\left(1 + x^2 - y\right)$. Beräkna med *maple* Maclaurinpolynomet $P_6(x,y)$ av grad 6 till $f(x, y)$ och rita funktionsytorna $z = f(x, y)$ och $z = P_6(x,y)$ i samma plot.

Anvisningar, anmärkningar, ledningar:

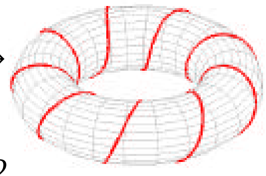
A. Allmänt

Gå igenom först mina exempel (ev. laborationerna till del A), de flesta ledningarna finns där.
OBS: för alla uppgifter gäller: du får gärna kommentera vad (hur) du gör, men f.f.a. skall du alltid kommentera resultatet (det du fick), gärna handskrivet! Svara på frågorna!
OBS: för alla plot-uppgifter gäller: för att få fram en så bra bild som möjligt måste du experimentera ett tag: vilket område i xy-planet skall du välja (ett rektangulärt område $a \le x \le b,\ c \le y \le d$ eller andra områden, i *maple* får c och d vara funktioner av x !), vilken plot-"*style*" (*wireframe, line, patch, contour...*) och vilken färgsättning och belysning (det klickar du enklast fram med musen) vilken noggrannhet (väljes med *grid = [n,m],* default är $n = m = 25$, eller med *numpoints = k*, default är k = 25x25=625).
Kom ihåg hur derivator skrives, t.ex. för funktionen *f(x,y)* = $x^2 + y^2$: med *f:=(x,y)->x^2+y^2* är *D[1](f)(x,y) = diff(f(x,y),x)* $= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$, *D[1,2](f)(x,y) = diff(f(x,y),x,y)* $= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)$ osv., med *f:=x^2+y^2* skall du skriva *diff(f,x)* *resp diff(f,x,y)* osv..
Ytor på parameterform (och dubbelintegraler) behandlar vi i laborationen till del D.

<u>B. Till uppgifterna</u>

<u>Uppg1:</u> Se ex1. Du kan begränsa de z-värden som skall plottas med *view= zmin..zmax* (bra om f är obegränsad). Glöm inte att lösa (för hand) och <u>kommentera</u> b)! b) bli väldigt tydligt med *filled=true*. Gradientvektorn beräknas med >*grad*(*f*(*x,y*),[*x,y*]) och kan ritas med *gradplot* (*plots*-paketet!). Jag normerade den, för att se pilarna bättre (alla har då längd 1). Det görs med *normalize* (ladda in *linalg*-paketet!), men tänk på problemet med ev. nollvektorn! Ett fält ritas med *fieldplot* (se del B: riktningsfält till en diff-ekvation). Pilarnas utseende väljer du med *arrows*, försök med *arrows=thick*, är väldigt tydligt (*arrows=thin* är default). En bra framställning får man alltid om man ritar även definitionsområdet (= projektionen av ytan i *xy*-planet), rita helt enkelt ytan $z = 0$ (eller $z = c$)…

<u>Uppg2:</u> Ta som a,b,c,p,q de fem första siffrorna i ditt personnummer utom 0 (hoppa över nollor). T.ex. ger 89-12-17-0337 värdena 8,9,1,2,1, persnr. 89-01-10-3506 ger värdena 8,9,1,1,3; har du får många nollor i ditt persnr., så börjar du om från början: 8001-02-0003 ger värdena 8,1,2,3,8). Kurvan kallas så ty det är en knut som ligger på (slingrar sig runt) en torus (= bilring, se uppg. 3.6). Se t.ex. på följande persnr. (vems?)→ Ritar en rymdkurva gör du med *spacecurve* (ladda in *plots*-paketet). Men för att se den bättre, skall du rita den som en slang med *tubeplot*, välj lämplig radie med *radius* = …; glöm ej *scaling* = *constrained* (så att slangen är rund). Se ex2.



För att beräkna kurvintegralen $\int_\alpha^\beta \mathbb{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\,dt$ beräknar du skalärprodukten m.h.a. *dotprod* (ladda in *linalg*-paketet). Se ex2. Obs: <u>ange korrekt ekvation</u> för ”sträckan”! Räkna numeriskt (först *Int*(...), sedan *evalf*, skriv 0.0 i.st.f. 0 (kan ta lång tid annars).

<u>Uppg.3:</u> Taylorutvecklingen till $f(x)$ kring a med n termer (resttermen på ordoform) får du med >*taylor*(*f*(*x*), *x=a,n+1*), n är den globala variabeln *Order* för serieutvecklingar (default är $n = 6$). Läs >?*Order* i *maple* för att förstå hur *maple* räknar. Taylorpolynomet får du med *convert*…Se ex3.

a) rita de olika polynomen med olika färger tillsammans med f i **<u>en</u>** figur (med *display*)!

b),c) skall du lösa med *maples* hjälp; <u>glöm ej att svara</u> (minsta n = .., största a = …)! Kommentera (det du fick)!

d) för en funktion f av flera variabler får du Taylorpolynomet kring (*a,b,c*..) med resttermen av ordning n med > *mtaylor*(*f*(*x,y,z*,..), [*x=a,y=b,z=c*,..],*n+1*), default är *a=b=c=...=0, n=6*. I tidigare mapleversioner måste detta "*multivariate taylorpolynom*" laddas in med >*readlib*(*mtaylor*). För att se skillnaden mellan ytorna får du experimentera ett tag (tänk med, f.f.a. D_f =??), rita i olika färger (med *display*). Se ex3.

<u>Anm</u>: här är det väldigt lämpligt att rita "animerat", se mitt ex. (gjort med *insequence* = *true*); läs även online-hjälpen om *animate* och *display*.

<u>Litteraturtips</u>:
Robert B.Israel: Calculus The Maple Way (Addison-Wesley, 96)

Lycka till !

Bernhard, januari 2003