Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2003–08–22, kl. 8.45–12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: , tel. 0740–459022
OBS: Fyll i allt påskrivningsomslaget. Ange namn och personnummer påvarje inlämnat blad!

---

1. Låt $f(x,y) = y - \dfrac{\sin\left(x^2 - y\right)}{\cosh\left(x - y^2\right)}$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,1,1)$. (4p)

b) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(1,1)$ i riktningen $(-2,3)$. (2p)

c) Visa att nivåkurvan $f(x,y) = 1$ lokalt i punkten $(1,1)$ är en funktionskurva $y = y(x)$ och ange en ekvation för tangenten till denna kurva i punkten $(1,1)$. (4p)

2. Låt $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (\sin t, \ln(\cos t), \cos t)$, $-\frac{\pi}{3} \xrightarrow{t} \frac{\pi}{3}$.

a) Ange en ekvation för tangenten till kurvan C i punkten $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{4})$. (2p)

b) Beräkna längden av kurvan C. (4p)

3. Låt $u = e^{x^2} + \sin y$, $v = xy + \sin x$.

a) Visa att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är bijektiv lokalt i origo. (2p)

b) Beräkna funktionaldeterminanten $\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}$ i punkten $(u_0, v_0) = (1,0)$. (2p)

4. Visa att origo är en stationär punkt till $f(x,y) = y\cos(xy)\ln(1 - x - y) - x^2$ och bestäm dess karaktär. [tips: Mclaurinutveckla f] (6p)

5. Beräkna volymen av kroppen $K = \left\{(x,y,z) : \sqrt[3]{x^2 + y^2 - 2} \le z \le \sqrt[3]{2}\right\}$. (5p)

6. Låt $\mathbb{F}(x,y) = (1 + \sinh(x - y), 1 - \sinh(x - y))$ $((x,y) \in \mathbb{R})$.

a) Bestäm det största och det minsta värde som $|\mathbb{F}|$ antar på $D : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x$. (6p)

b) Beräkna $\displaystyle\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ då $C : \begin{cases} x = 2\sin(\frac{p}{4}t) + t\cos(\frac{p}{2}t) \\ y = 2t\cos(\frac{p}{4}t) + \sin(pt) \end{cases}$, $-1 \xrightarrow{t} 1$. (4p)

7. **a)** Visa att om $\mathbb{F} = (P,Q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är C^1 och konservativt såär $P'_y = Q'_x$. (3p)

b) Formulera och bevisa kedjeregeln för en funktion $f(x(t), y(t))$. (6p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2002–08–23, kl. 8.45–12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: , tel. 0740–459022
OBS: Fyll i allt påskrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

1. Låt $f(x,y)=3x^3+y^3-2xy$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(1,1,2)$. (4p)

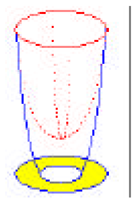
b) Visa att origo är en stationär punkt och bestäm dess karaktär. (2p)

c) Nivåkurvorna $C_1: f(x,y)=2$ och $C_2: x^4+2y^3+x^2y=4$ skär varandra i punkten $(1,1)$. Bestäm vinkeln mellan C_1 och C_2 i denna punkt. (4p)

2. Lös problemet $xf'_x-3yf'_y=2x^2y\sqrt{xy}\sin(xy)$, $f(x,x)=x^2$ $\left(0<x<\sqrt{\pi}, 0<y<\sqrt{\pi}\right)$. (6p)

Ledn.: inför nya variabler $u=x\sqrt{xy}$, $v=\cos(xy)$.

3. Vilka värden antar potentialen $\Phi(x,y,z)=6xy-z^3$ på sfären $x^2+y^2+z^2=5$? (6p)



4. En vas definieras av olikheterna $0\le 3e^{x^2+y^2}-4\le 2z\le 2e^{x^2+y^2}$.

a) Hur mycket vatten ryms i vasen? (3p)

b) Beräkna vasens totala massa då dess densitet är ñ$(x,y,z)=1$. (3p)

5. Låt $\mathbb{F}=\left(3x^2y^2+\frac{\sin x}{1+x^2},\ 2y\left(x^3+e^{-y^4}\right)\right)$.

a) Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$? (2p)

b) Beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas från $(-2,2)$ till $(2,-2)$ medurs längs ellipsen $2x^2+3y^2=20$. (5p)

6. Beräkna ett numeriskt närmevärde för längden av kurvan $y=\frac{1}{3}x^3, -1\le x\le 1$.

Ledn.: längden ges av en integral som ej är elementär; Maclaurinutveckla dess integrand t.o.m. ordningen 10; feluppskattning krävs ej. (5p)

7. c) Definiera öppen mängd i $\mathbb{R}^n$. (2p)

d) Formulera inversa funktionssatsen. (2p)

e) Formulera och bevisa en formel för beräkning av riktningsderivatan av en funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ i en punkt (a,b) i riktningen $\boldsymbol{v}$. (6p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2002-01-18, kl 8.45-12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Fredrik Altenstedt, tel. 0740 - 459022
OBS: Fyll i allt påskrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

1. Låt $f(x,y)=\left(x^3-y^4\right)\ln\left(e-2+x^4+y^4\right)$.

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(1,1,0)$. (4p)

b) Vilka värden antar $f'_{\boldsymbol{v}}(1,1)$ (= riktningsderivatan av f i punkten $(1,1)$ i riktningen $\boldsymbol{v}$), $\boldsymbol{v}\in\left\{(x,y): x^2+y^2=1\right\}$? (3p)

2. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x,y)=x^3-2xy+2y^2$ och avgör deras typ. (6p)

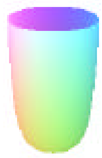
3. Låt $\Omega=\{(x,y): x>0,\ y>0\}$, $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$.

a) Visa att tillordningen $(x,y)\mapsto(u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i Ω. (2p)

b) Bestäm en funktion $f(x,y)$ som satisfierar
$x\,f'_x+y\,f'_y-2f=x^3y\cos(xy)$, $f(x,\sqrt{x})=0$ för $(x,y)\in\Omega$. (6p)

c) Beräkna arean av det område i Ω som begränsas av kurvorna
$y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{3}{x}$, $y=\frac{x}{2}$ och $y=2x$. (4p)

4. Låt $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2+\dfrac{2}{2-x^2-y^2}$, *l.e.* = längdenhet = *dm*.



a) Insidan av ett glas ges av $z=f(x,y)$, $x^2+y^2\le 1.21$. Man fyller vatten i glaset tills det står 2 *l.e.* högt. Hur mycket vatten finns då i glaset? (4p)

b) Är f differentierbar i origo? (2p)

5. Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F}(x,y)=\left(2y\sqrt{y}\sinh x+x^3,\ 3\sqrt{y}\cosh x+x\right)$ uträttar längs kurvan $C: y=\cosh(x),\ -\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\xrightarrow{x}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ (4p).
Beräkna även längden av C (3p). (7p)

6. Visa att funktionen
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\ln(x+1)}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$
är deriverbar i origo. (4p)

7. a) Definiera inre punkt till en mängd och öppen mängd. (2p)

b) Låt $\mathbb{F}$ vara ett fält som är C^1 i $\mathbb{R}^3$. Visa att om kurvintegralen $\int_C \mathbb{F}\bullet d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen i $\mathbb{R}^3$ så är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^3$. (6p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2001-08-24, kl. 12.15-18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Anna Nordqvist, tel. 0740 - 459022
OBS: Fyll i allt påskrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

1. Låt $F(x,y,z,t)=\dfrac{\arctan(2x-3y+z)+t}{x^2+y^2+z^2+t^2}$

Beräkna riktningsderivatan av F i punkten $(1,1,1,1)$ i riktningen $(-2,-2,1,-1)$.
I vilken riktning växer funktionsvärdena $F(x,y,z,t)$ snabbast i punkten $(1,1,1,1)$? (5p)

2. Låt $\Omega=\{(x,y):|x|<\frac{\pi}{2},1<y\}$, $u=y-\sin x$ och $v=y\sin x$.

a) Visa att u, v duger som nya variabler i Ω. (2p)

b) Lös problemet $\tan(x)z'_x - y z'_y = y+\sin(x)$, $z(\frac{\pi}{6},y)=\cosh(\frac{y}{2})-y$, $(x,y)\in\Omega$. (6p)

c) Beräkna $\iint_D \dfrac{y^2-\sin^2 x}{y\tan x}dxdy$ där området D ges av olikheterna

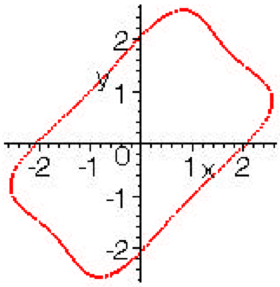
$0<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}+\sin x\le y\le 2+\sin x, 1\le y\sin x\le 2$. (4p)

3. Beräkna längden av kurvan $y=\ln x$, $1\le x\le\sqrt{3}$. (4p)

4. För vilka reella tal α,β har $\dfrac{(\tan x - x)^\alpha}{(\tan x + x)^\beta}$ ett gränsvärde då x går mot 0? (4p)

5. Låt $F(x,y)=(x-y)^4+2x^2y^2$.

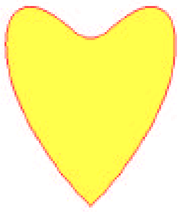
a) Bestäm det minsta och det största avståndet mellan origo och en punkt på kurvan $C: F(x,y)=18$. (6p)



b) Visa att kurvan C lokalt i punkten $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ är en funktionskurva $y=f(x)$ och ange en ekvation för tangenten till denna kurva i punkten $(\sqrt{3},\sqrt{3})$. (3p)

6. Låt $r(\varphi)=2\sqrt{\cos^2(2\varphi)+\sin^2(4\varphi)}$ och

$C: r=r(\varphi)$, $\frac{\pi}{4}\xrightarrow{\varphi}\frac{3\pi}{4}$ (r,φ polära koordinater).



a) Beräkna det arbete som kraftfältet $(\sin(2x)\sin(2y), -\cos(2x)\cos(2y))$ uträttar då en partikel förflyttas längs C. (2p)

b) Beräkna arean av det område som omsluts av C. (4p)

7. a) Definiera "positivt definit kvadratisk form". (2p)

b) Definiera "randpunkt till en mängd $M\subset I\!R^n$". (2p)

c) Formulera och bevisa Greens sats. (6p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 1999-03-08, kl 14.15-18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat!

---

1. Låt $F(x,y,z) = \cosh(xz - yz) + \sinh(x + y - z)$ och $P = (1,1,2)$.
a) Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z) = 1$ i punkten P. (4p)
b) Beräkna riktningsderivatan av F i punkten P i riktningen $\vec{v} = (2,1,2)$. (3p)
c) Visa att nivåytan $F(x,y,z) = 1$ lokalt i P är en funktionsyta $z = f(x,y)$. (1p)

2. Beräkna längden av kurvan $C: y^2 = x^3$, $0 \le x \le 1$ ["Neil's parabel"]. (4p)

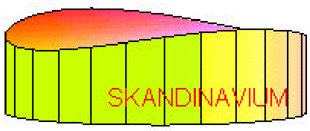
3. Bestäm för $0 < |y| < x < 1$ en funktion $z(x,y)$ som är 0 på Neil's parabel (se uppg.2) och satisfierar $x^3 z'_x + x^2 y z'_y = y^2$
[ledn: inför de nya variablerna $u = x^2 - y^2$, $v = x^2 y^{-2}$] . (6p)

4. Betrakta kroppen $K = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 2500,\ 0 \le z \le 15 + \frac{x^2}{500}\right\}$.
a) Beräkna K:s volym. (4p)
b) Klockan 12 en vacker vårdag var temperaturen i en punkt (x,y,z) på K:s tak $T(x,y,z) = 10^{-3}\left(y^2 - xy + 500z\right)$ [$^{\circ}$ Celsius].
Mellan vilka värden varierade temperaturen på K:s tak då? (6p)
[K:s tak är ytan $\left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 2500,\ z = 15 + \frac{x^2}{500}\right\}$]

5. Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F}(x,y,z) = (y - z, z - x, -xy)$ uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan
$$C: \begin{cases} x = 50\cos t \\ y = 50\sin t \\ z = 15 + 5\cos^2 t \end{cases},\ -\pi \xrightarrow{t} \pi .$$
(5p)

6. Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^3 i $D: x^2 + y^2 < 1$
och funktionen
$$\frac{f(x,y) - 1 + x^2 + 4xy + 7y^2}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}}$$
är begränsad i D.
Visa att origo är en stationär punkt till f och avgör dess karaktär. (5p)

7. **a)** Vad menas med att en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i (a,b)? (2p)
b) Definiera konservativt kraftfält. (2p)
c) Formulera Taylors formel för en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (2p)
d) Formulera och bevisa Greens sats. (6p)

Kroppen K (uppgift 4, 5): 

BB

Svar (gamla del C-tentor)

03-08-22:

1a) $2x-2y+z=1$ **b)** $\frac{10}{\sqrt{13}}$ **c)** $y=x$ **2a)** $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\ln 2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ **b)** $2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

3b) -1 **4)** lok. maximipunkt **5)** $4\sqrt[3]{2}p$ **6a)** $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{2}\cosh 1$ **b)** $4\sqrt{2}$

02-08-23:

1a) $7x+y-z=6$ **b)** sadelpunkt **c)** $\arccos\frac{49}{5\sqrt{170}} = \arctan\frac{6}{7} - \arctan 7$

2) $f(x,y) = x\sqrt{xy}\left(1+\cos(xy)-\cos\left(x\sqrt{xy}\right)\right)$ **3)** $[-15,15]$ **4a)** $p(8\ln 2-3)$ **b)** $p(2\ln 3-1)$

5a) ja **b)** 64 **6)** $\frac{391}{180}$

02-01-18:

1a) $3x-4y-z=-1$ **b)** $[-5,5]$ **2)** $(0,0)$: sadelpunkt, $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$: lok. minimipunkt

3b) $f(x,y) = \frac{x^2}{2}\left(\sin xy - \sin\left(\frac{x}{y}\right)^3\right)$ **c)** $2\ln 2$ *a.e.* **4a)** $\frac{2p}{3}(4-3\ln 2)$ dm^3 **b)** ja

5) arbetet är $2(2\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3})$, kurvans längd är $2\sqrt{3}$ *l.e.*

01-08-24:

1a) $F_v'(1,1,1,1) = \frac{1}{\sqrt{10}}$, F växer i punkten $(1,1,1,1)$ snabbast i riktningen $(3,-7,1,1)$

2b) $z(x,y) = \sin x + \cosh(y\sin x) - y - \frac{1}{2}$ **c)** $\frac{7}{8}\ln 2$ **3)** $2-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{6}-\sqrt{3})$

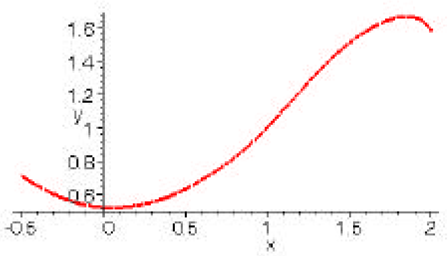
4) $b \le 3a$ **5a)** $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{3\sqrt{6}}$ **b)** $x+y=2\sqrt{3}$ **6a)** 0 **b)** π

99-03-08:

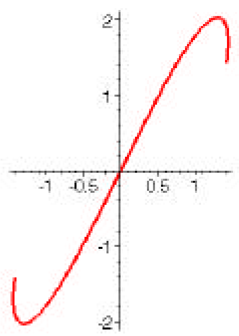
1a) $z=x+y$ **b)** $\frac{1}{3}$ **2)** $\frac{2}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)$ **3)** $z(x,y) = \frac{y^2}{x^2}\ln\frac{x^3}{y^2}$

4a) $40625p$ **b)** $[\,7.5^\circ, 11.25^\circ\,]$ **5)** $1250p$ **6)** lok. maximipunkt

03-08-22: nivåkurvan $f(x,y)=1$ i uppg. 1c)



03-08-22: kurvan C i uppg. 6b)



Lycka till

Bernhard