

# INSTUDERINGSUPPGIFTER

- Dessa uppgifter skall hjälpa dig vid inläringen, de skall fungera som ett slags diagnostiskt prov: (hur bra) kan du redan det vi har gått igenom den gångna veckan? Försök först att lösa uppgifterna hemma, skriv ner dina lösningar på ett bra sätt, ta med dem till räknestugan och diskutera dem i smågrupp: är lösningen korrekt? fullständig? bra nerskriven? omständlig? är alla använda begrepp/satser klara? Det viktigaste är inte att du har en korrekt lösning utan att du jobbar bra med uppgifterna! Diskutera då även föreläsningarna, repetitionsfrågorna (de liknar teorifrågorna på tentan och frågorna på "muntan" efter hela ettans matte) och extraövningarna.
- Tänk på att du måsteträna att formulera dig, att skriva ner en lösning på ett acceptabelt sätt. Uppgifterna är eller liknar tenta-uppgifter.
- Gå igenom lösningarna (kritiskt), men först **efter** det att du har försökt.

## Instuderingsuppgift 1

- a) Given är kurvan  $C : r = r(t) = (t, t^2 - 4, t), -2 \xrightarrow{t} 2$ .  
 Beräkna det arbete som kraftfältet  $\mathbb{F} = (xy + z, \sin x + \sinh y + \cos z, xyz)$  utträttar då en partikel förflyttas längs kurvan  $C$ .  
 Beräkna även längden av kurvan  $C$ .
- b) Är funktionen  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y)}{xy^2}, & \text{då } xy \neq 0 \\ 0, & \text{då } xy = 0 \end{cases}$  kontinuerlig resp. part. deriverbar i origo?

## Instuderingsuppgift 2

- a) Är funktionen  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y)}{xy^2}, & \text{då } xy \neq 0 \\ 0, & \text{då } xy = 0 \end{cases}$  differentierbar?
- b) Låt  $F(x, y, z) = \sin(ye^x) + e^{x+2y+4z}$ .
- I vilken riktning avtar  $F$  snabbast i origo?
  - Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan  $Y: F(x, y, z) = 1$  i origo, först direkt (med  $F$ ), sedan genom att beskriva  $Y$  som en funktionsyta  $z = f(x, y)$  nära origo.
- c) Bestäm en funktion  $z(x, y)$  som satisfierar  $xz'_x - yz'_y = 2$  och  $z(x, x) = x^2$  för  $(x, y) \in D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$  (ledn.: inför de nya variablerna  $u = \arctan(xy), v = \frac{x}{y}$ ).

### Instuderingsuppgift 3

Funktionen  $f$  definieras genom  $f(0)=1$  och  $f(x)=\frac{\arctan x}{\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$  för  $0 < |x| < 1$ .

Visa att funktionen är deriverbar i 0.

### Instuderingsuppgift 4

a) Låt  $u = \arctan(xy)$ ,  $v = \frac{x}{y}$  för  $(x, y) \in D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$  (uppg. 2c).

Visa att tillordningen  $(x, y) \mapsto (u, v)$  är lokalt bijektiv i varje punkt i  $D$ .

b) Bestäm alla stationära punkter till  $f(x, y) = \ln|2x-1| + \ln|y| + xy - x$  och deras karaktär.

c) Bestäm värdemängden till funktionen  $f(x, y) = \frac{1+2x+2y}{1+x^2+y^2}$ ,  $D_f = \mathbb{R}^2$ .

### Instuderingsuppgift 5

a) Beräkna volymen av den kropp som begränsas

nedåt av konen  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$  och

uppåt av sfären  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$  ("glassmängden").



b) Beräkna  $\iint_D \frac{e^{2x}}{y(e^{2x}+1)} dx dy$ , då  $D$  är det område i första kvadranten som

begränsas av kurvorna  $y = 2e^{-x}$ ,  $y = 3e^{-x}$ ,  $y = \cosh x$  och  $2y = \cosh x$ .

### Instuderingsuppgift 6

a) Låt  $\mathbb{F} = \left( \frac{4x+2y^2-1}{1+(2x+y^2)^2}, \frac{4xy+2y^3-y}{1+(2x+y^2)^2} \right)$ .

Visa att  $\mathbb{F}$  är konservativt i  $\mathbb{R}^2$  och beräkna det arbete som  $\mathbb{F}$  uträttar då en

partikel förflyttas längs spiralen  $C : \begin{cases} x = \sqrt{e^{-t}} \cos t \\ y = \sqrt{e^{-t}} \sin t \end{cases}, 0 \xrightarrow{t} 3\delta$ .

b) Beräkna kurvintegralen  $\int_C \frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x} dx - \arctan \frac{y}{x} dy$  där  $C$  är den positivt

orienterade randen till det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y = x$ ,  $y = \sqrt{3}x$ .

## EXTRAUPPGIFTER

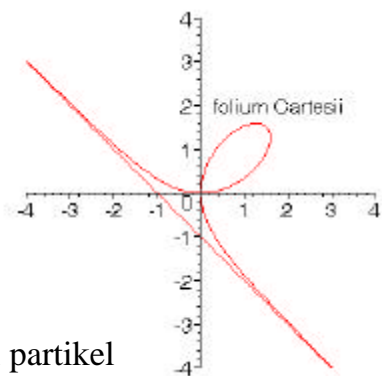
- Låt  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Vi har definierat:  $M$  är *öppen* om varje punkt i  $M$  är inre punkt i  $M$  och  $M$  är *sluten* om  $\mathbb{R}^n \setminus M$  är öppen. Visa:  
 $M$  är sluten  $\Leftrightarrow \partial M \subseteq M$  (kursbokens definition).
- Domkyrkan i Ulm har ett 161m högt torn med en spiraltrappa som man kan gå upp i. Hur lång tid tar det dig att nå utsiktsplattformen på 150m höjd, om du startar i punkten  $(\sqrt{3}, 0, 0)$  och går 1km/h längs gångrinjen  $r(v) = (\sqrt{3} \cos v, \sqrt{3} \sin v, v)$ ?
- Beräkna längden av parabelbågen  $y = x^2$  mellan  $(1, 1)$  och  $(2, 4)$ .
- Visa att för ett polynom  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k$  gäller  $a_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$  för  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .
- Ange Maclaurinpolynomet av grad 8 till  $f(x) = \frac{1}{\cos(x^2)}$ . Gör tre lösningar:  
 (a) med ansättningen  $f(x) = \sum_{k=0}^8 a_k x^k + \dots$ , (b) med  $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots$  och  
 (c) med "lång division".
- Visa att funktionen  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$  är  $C^1$  i  $|x| < \pi$ .
- Beräkna  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1+x}}{x} - \frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sinh x} \right)$ .
- Visa att för positiva reella tal  $x, y, z$  gäller:  $xyz = a^3 \Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z) \geq (1+a)^3$ .
- Ett plåtkärl har formen av ett rätblock. Plåten i bottenytan kostar 2 öre/cm<sup>2</sup> och i de övriga fem sidorna 1 öre/cm<sup>2</sup>. Vilka mått skall kärlet ha för att rymma maximal volym, då den totala plåtkostnaden uppgår till 36 öre?
- I vilka punkter på ellipsoiden  $Y: (x-y)^2 + 2y^2 + 4z^2 = 6$  är det elektriska fältet starkast, resp. svagast, då den elektriska potentialen i punkten  $(x, y, z)$  är  $F(x, y, z) = x^2 - \sqrt{2}y^2 + \sqrt{6}z^2$  (du skall alltså bestämma de punkter på  $Y$  i vilka  $|\text{grad}F(x, y, z)|$  antar sitt största, resp. sitt minsta värde).
- $K$  begränsas av  $xy$ -planet och ytan  $z = 20 - 2x^2 - y^2$ .  
Genom  $K$  borrar ett cylindriskt hål med  $z$  axeln som borraraxel och radien  $R$  så att den återstående kroppen har hälften så stor volym som

12. Beräkna  $\iint_D e^{xy-x^2-y^2} dx dy$  då  $D$  är första kvadranten i  $xy$ -planet.

13. För vilken enkel, sluten  $C^1$ -kurva  $C$  utträtt kraftfältet  $(x^2y + y^3 - 12y, 24x - x^3 - 6xy^2)$  det största arbete, då en partikel förflyttas ett varv moturs längs  $C$ ?

14. Beräkna arean av området inom öglan av kurvan

$$C: \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}, -1 \neq t \in \mathbb{R} \quad (\text{Descartes' blad}).$$

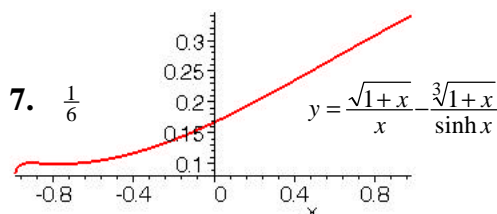
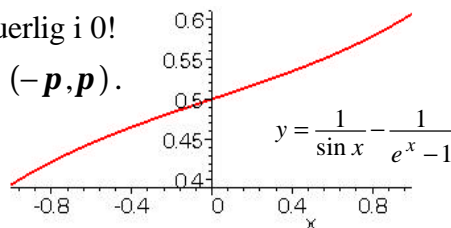


15. Beräkna det arbete som kraftfältet  $(2x + 3y + xe^{x^2+y^2}, 2x + 3y + ye^{x^2+y^2})$  utträtt då en partikel förflyttas från  $(0,0)$  till  $(p, 0)$  längs kurvan  $y = \sin x$ .

svar till extrauppgifterna:

2. 18 minuter    3.  $\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4} \ln((\sqrt{17}-4)(\sqrt{5}+2))$     5.  $f(x) = 1 + \frac{x^4}{2} + \frac{5x^8}{24} + x^8 o(1)$

6. Visa först att  $f'(0) = \frac{1}{12}$ , sedan att  $f'$  är kontinuerlig i 0!  
Glöm ej att motivera varför  $f$  är  $C^1$  i  $0 \neq x \in (-p, p)$ .



9.  $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$

10. störst i  $\pm(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$ , minst i  $\pm(1, -1, 0)$

11.  $R = \sqrt{8 - \sqrt{64 - \frac{80}{\sqrt{6}}}}$     12.  $\frac{2p}{3\sqrt{3}}$

13. ellipsen  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

14.  $\frac{3}{2}$  Du får hela lösningen sid.9

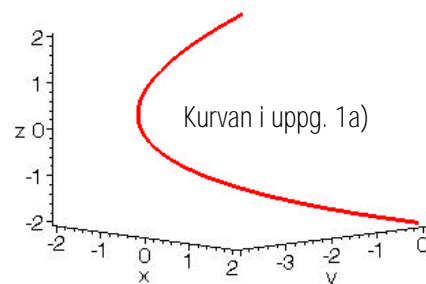
15.  $2 + p^2 + \frac{1}{2}e^{p^2}$

Lösningförslag till instuderingsuppgift 1

$$\mathbf{a)} \quad A = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-2}^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' dt =$$

$$= \int_{-2}^2 (t(t^2-4) + t, \sin t + \sinh(t^2-4) + \cos(t), t(t^2-4)t) \cdot (1, 2t, 1) dt =$$

$$= \int_{-2}^2 (t(t^2-4) + t + (\sin t + \sinh(t^2-4) + \cos t)2t + t^2(t^2-4)) dt = [\text{utnyttja jämn-udda !!}] =$$



$$= 2 \int_0^2 (2t \sin t + t^4 - 4t^2) dt = 2 \left[ 2(\sin t - t \cos t) + \frac{1}{5} t^5 - \frac{4}{3} t^3 \right]_0^2 = 2(2 \sin 2 - 4 \cos 2 + \frac{32}{15} (3 - 5)).$$

$$L = \int_C ds = \int_{-2}^2 |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_{-2}^2 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + (2t)^2 + 1} dt = 2 \int_0^2 \sqrt{2(1 + 2t^2)} dt =$$

$$= [\sqrt{2}t = u] = 2 \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + u^2} du = [\text{se nedan}] = \left[ u\sqrt{1 + u^2} + \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right]_0^{2\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} + \ln(2\sqrt{2} + 3).$$

Arbetet är alltså  $\frac{4}{15}(15 \sin 2 - 30 \cos 2 - 32)$  och längden  $6\sqrt{2} + \ln(2\sqrt{2} + 3)$ .

[Den integral du får för att beräkna längden i uppg.1a) bör du kunna (del A!):

antingen du börjar med partiell integration:  $\int (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} dx = x(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} - \int \frac{1}{2} x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} 2x dx =$

$$= x(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} - \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{1 + x^2}} dx = x\sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{osv.,}$$

eller (fiffigast) du substituerar  $x = \sinh t$ :

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx = \int \cosh t \cosh t dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2} \sinh 2t) = \frac{1}{2}(t + \sinh t \cosh t) = \frac{1}{2}(\sinh^{-1} x + x\sqrt{1 + x^2}).]$$

b)  $f$  är ej kontinuerlig i origo, ty t.ex. går  $f(x, x)$  ej mot  $f(0, 0) = 0$  då  $x$  går mot 0:

$$f(x, x) = \frac{\sin(x^3)}{x^3} \rightarrow 1 \quad \text{då } (x, x) \rightarrow (0, 0).$$

Men  $f$  är deriverbar (även) i origo, ty  $\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0 \rightarrow 0$  då  $h \rightarrow 0$  och

$$\frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \frac{0 - 0}{k} = 0 \rightarrow 0 \quad \text{då } k \rightarrow 0 \quad (\text{dvs. } f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0).$$

## Lösningsförslag till instuderingsuppgift 2

a) Nej, ty  $f$  är ej kontinuerlig i origo (differentierbarhet medför ju kontinuitet)!

b) Svaren fås m.h.a. gradientvektorn:

$$\text{grad}F = (ye^x \cos(ye^x) + e^{x+2y+4z}, e^x \cos(ye^x) + 2e^{x+2y+4z}, 4e^{x+2y+4z}), \text{ alltså är}$$

$$\text{grad}F(0, 0, 0) = (1, 3, 4) \text{ och vi får: } F \text{ avtar snabbast i riktningen } \underline{-(1, 3, 4)} \text{ och}$$

$$\text{tangentplanet har ekv. } \text{grad}F(0, 0, 0) \cdot (x - 0, y - 0, z - 0) = 0, \text{ alltså } \underline{x + 3y + 4z = 0}.$$

Vi kan också lokalt kring origo lösa ut  $z$ :

$$e^{x+2y+4z} = 1 - \sin(ye^x) \Rightarrow z = \frac{1}{4}(\ln(1 - \sin(ye^x)) - x - 2y) = f(x, y) \text{ och tangentplanet fås nu}$$

$$\text{som } z = f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y \text{ där } \text{grad}f = \frac{1}{4} \left( \frac{-ye^x \cos(ye^x)}{1 - \sin(ye^x)} - 1, \frac{-e^x \cos(ye^x)}{1 - \sin(ye^x)} - 2 \right),$$

$$\text{alltså } \text{grad}f(0, 0) = \frac{-1}{4}(1, 3) \text{ och det ger samma svar s.o..}$$

c)  $xz'_x - yz'_y = x(z'_u u'_x + z'_v v'_x) - y(z'_u u'_y + z'_v v'_y) = \frac{xy - yx}{1 + x^2 y^2} z'_u + 2 \frac{x}{y} z'_v = 2vz'_v = 2$ , denna

differentialekvation har den allmänna lösningen  $z(u, v) = \ln v + g(u)$  ( $g$  en godt.  $C^1$ -funkt.),  
dvs. (back to  $x, y$ ):  $z(x, y) = \ln \frac{x}{y} + g(\arctan(xy)) = \ln x - \ln y + f(xy)$  ( $f$  en godt.  $C^1$ -funkt.).

Nu skall  $z(x, x) = f(x^2) = x^2$ , det ger  $f(t) = t$  och svaret  $\underline{z(x, y) = \ln x - \ln y + xy}$ .

## Lösningförslag till instuderingsuppgift 3

Vi skall undersöka om  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\arctan x - \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))}{x \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))}$  har ett gränsvärde då  $x$  går mot 0. Vi Maclaurinutvecklar, först nämnaren med bara en term, sedan täljaren t.o.m. samma grad:

$$\frac{\arctan x - \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))}{x \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))} = \frac{x + x^3 B_1(x) - (x + x^3 B_2(x))}{x^2 + x^3 B_3(x)} = \frac{x^3 B_4(x)}{x^2 + x^3 B_3(x)} = \frac{x B_4(x)}{1 + x B_3(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

( $B_k$  är funktioner som är begränsade i en omgivning av 0,  $B_4 = B_1 - B_2$ ).

Det visar att  $f$  är deriverbar i 0 med  $f'(0) = 0$ .

ANM:  $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \tanh^{-1}(x)$  har (den enkla) Maclaurinutvecklingen av grad 3

$$\frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2} \left( \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^4 B_5(x) \right) - \left( -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^4 B_6(x) \right) \right) = x + \frac{x^3}{3} + x^4 B_7(x).$$

## Lösningförslag till instuderingsuppgift 4

a)  $\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{y}{1+x^2 y^2} & \frac{x}{1+x^2 y^2} \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{-x}{y(1+x^2 y^2)} \neq 0$  i  $D$ , inversa funktionssatsen ger påståendet.

b)  $\begin{cases} f'_x = \frac{2}{2x-1} + y - 1 = 0 & \Rightarrow \frac{2}{2x-1} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{3-2x}{2x-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) = 0 \\ f'_y = \frac{1}{y} + x = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{x} \quad \uparrow \end{cases}$ ,

det ger de stationära punkterna  $(1, -1)$  och  $(-\frac{1}{2}, 2)$ . Deras typ avgörs (ev.) m.h.a. den kvadratiske formen  $Q(h, k) = f''_{xx} h^2 + 2 f''_{xy} h k + f''_{yy} k^2$ :  $f''_{xx} = \frac{-4}{(2x-1)^2}$ ,  $f''_{xy} = 1$ ,  $f''_{yy} = \frac{-1}{y^2}$ ; i punkten  $(1, -1)$ :  $Q(h, k) = -4h^2 + 2hk - k^2 = -((k-h)^2 + 3k^2)$  är negativt definit, i punkten  $(-\frac{1}{2}, 2)$ :  $Q(h, k) = -h^2 + 2hk - \frac{1}{4}k^2 = -(h-k)^2 + \frac{3}{4}k^2$  är indefinit, därmed är svaret:  $(1, -1)$  : lokal maximipunkt och  $(-\frac{1}{2}, 2)$  : sadelpunkt.

c)  $\begin{cases} f'_x = \frac{2(1+x^2+y^2) - 2x(1+2x+2y)}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ f'_y = \frac{2(1+x^2+y^2) - 2y(1+2x+2y)}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$  (subtrahera!), och det ger de stationära punkterna

$(-1, -1)$  och  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  med  $f(-1, -1) = -1$  och  $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2$ . Om vi räknar med polära

koordinater så ser vi att  $0 \leq |f(x, y)| = \frac{|1 + 2r \cos \mathbf{j} + 2r \sin \mathbf{j}|}{1 + r^2} < \frac{1 + 4r}{r^2} < \frac{5}{r} \leq 1$  då  $r \geq 5$ .

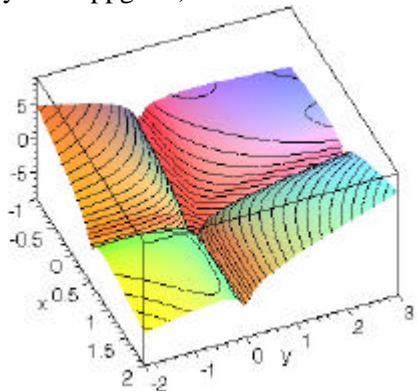
På den kompakta cirkelskivan  $\Omega: x^2 + y^2 \leq 25$  (t.ex.) antar den kontinuerliga funktionen  $f$  ett största och ett minsta värde (sats 4, sid. 33) och måste göra det i det inre av  $W$  (ty på randen är  $|f| < 1$ ), alltså i en stationär punkt (ty  $f$  är  $C^1$ ), men de enda möjliga punkterna är  $(-1, -1)$  och  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (som vi visat ovan), alltså är  $-1$  det minsta värde som  $f$  antar och  $2$  det största värde som  $f$  antar. Eftersom  $\mathbb{R}^2$  är bågvis sammanhängande och  $f$  kontinuerlig så antar  $f$  också alla värden mellan  $-1$  och  $2$  (solv, sats 6 sid. 34). Svaret är därmed  $[-1, 2]$ .

**ANM.:** I linjär algebra visas att för en kvadratisk form  $Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  gäller:

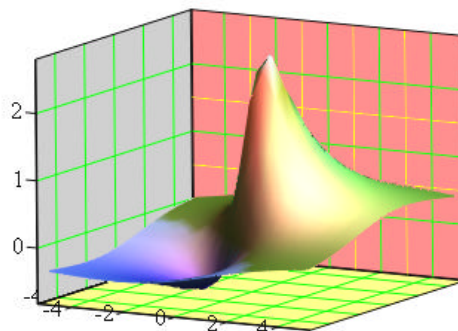
$$Q \text{ är } \begin{cases} \text{positivt definit} \\ \text{negativt definit} \\ \text{indefinit} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \begin{cases} > 0 \text{ och } A > 0 \\ > 0 \text{ och } A < 0 \\ < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{egenvärden } \lambda \text{ till } \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \text{ är } \begin{cases} \text{alla } > 0 \\ \text{alla } < 0 \\ \text{ett } > 0, \text{ ett } < 0 \end{cases}$$

[egenvärdena till  $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$  är rötterna till polynomet  $\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix}$ .

ytan i uppg. 4b)



ytan i uppg. 4c)



## Lösningförslag till inst

Beräkna först snittet mellan konen och sfären, antingen genom att sätta in  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}z^2$  från konen

$$\frac{1}{4}z^2 + (z-1)^2 = 2 \Rightarrow z^2 - \frac{8}{5}z = \frac{4}{5} \Rightarrow \dots \Rightarrow z = 2, \text{ eller genom att sätta in}$$

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r \text{ från konen i sfären, det ger } r^2 + (2r-1)^2 = 2 \Rightarrow r^2 - \frac{4}{5}r = \frac{1}{5} \Rightarrow \dots \Rightarrow r = 1.$$

Kroppen  $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$ , med  $D : x^2 + y^2 \leq 1$ , har då

$$\text{volymen } m(K) = \iint_D (1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}) dx dy - \iint_D (2\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = [\text{pol. koord.}]$$

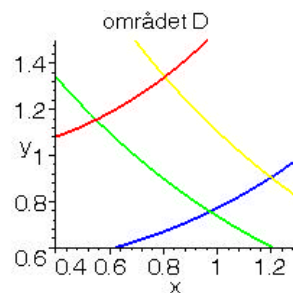
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \sqrt{2 - r^2} - 2r) r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 (r + r\sqrt{2 - r^2} - 2r^2) dr = \pi \left[ r^2 - \frac{2}{3}(2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}r^3 \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2} - 3).$$

b) Gör variabelsubstitutionen  $\begin{cases} u = \frac{\cosh x}{y} \\ v = ye^x \end{cases}$ , då avbildas  $D$  på  $D'$ :  $\begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 2 \leq v \leq 3 \end{cases}$ , funktionaldeterminanten

$$\text{är } \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sinh x}{y} & \frac{-\cosh x}{y^2} \\ ye^x & e^x \end{vmatrix} = \frac{e^x}{y} (\sinh x + \cosh x) = \frac{e^{2x}}{y} = \frac{1}{\frac{d(x,y)}{d(u,v)}} (> 0),$$

$$\text{alltså blir } \iint_D \frac{e^{2x}}{y(e^{2x}+1)} dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{e^{2x}+1} du dv = [e^{2x} + 1 = ye^x \frac{e^x + e^{-x}}{y}] =$$

$$= \int_2^3 \int_1^2 \frac{1}{2vu} du dv = \frac{1}{2} [\ln v]_2^3 [\ln u]_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2 \ln \frac{3}{2}.$$



## Lösningförslag till instuderingsuppgift 6

a) "Upptäck" att  $\mathbf{F}$  är konservativt, antingen genom att visa

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{4xy + 2y^3 - y}{1 + (2x + y^2)^2} \right) = \frac{4y(1 + (2x + y^2)^2) - (4x + 2y^2 - 1)4y(2x + y^2)}{(1 + (2x + y^2)^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{4x + 2y^2 - 1}{1 + (2x + y^2)^2} \right),$$

eller genom att bestämma en potential  $F$ :

$$F'_x = \frac{4x + 2y^2}{1 + (2x + y^2)^2} - \frac{1}{1 + (2x + y^2)^2} \Rightarrow F(x, y) = \frac{1}{2} \ln(1 + (2x + y^2)^2) - \frac{1}{2} \arctan(2x + y^2) + f(y), f \equiv 0$$

duger. Arbetet kan då beräknas som "potentialskillnaden"

$$F(-\sqrt{e^{-3p}}, 0) - F(1, 0) = \frac{1}{2} (\ln(1 + 4e^{-3p}) - \ln 5 + \arctan 2 + \arctan(2e^{-\frac{3p}{2}})),$$

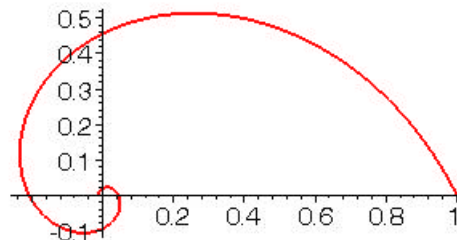
eller genom att välja en enklare väg ( $\mathbf{F}$  är  $C^1$  överallt), t.ex. sträckan längs  $x$ -axeln:

$y = 0, x = t, 1 \xrightarrow{t} -\sqrt{e^{-3p}}$ , arbetet är då

$$\int_1^{-\sqrt{e^{-3p}}} \frac{4t-1}{1+4t^2} dt = \frac{1}{2} [\ln(1+4t^2) - \arctan(2t)]_1^{-\sqrt{e^{-3p}}} = \frac{1}{2} (\ln(1+4e^{-3p}) - \ln 5 + \arctan 2 + \arctan(2e^{-\frac{3p}{2}}))$$

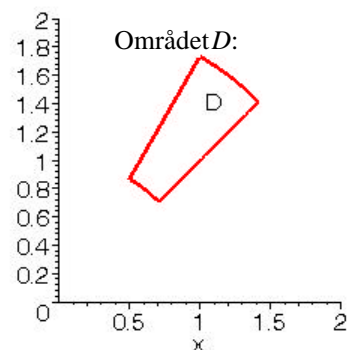
som ovan.

kurvan är en spira



b) Naturligtvis använder vi Greens formel ( $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y)) = (\frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x}, -\arctan \frac{x}{y})$ ) är  $C^1$  i en öppen mängd som innehåller området  $D$  som delmängd, orienteringen (positivt = moturs) är den rätta; tyvärr är  $\mathbf{F}$  ej konservativt, då vore kurvintegralen längs  $\partial D$  noll:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P dx + Q dy &= \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy = \iint_D \left( \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2} \right) dx dy = [\text{pol. koord.}] = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \left( \frac{r \sin j}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) r dr dj = \int_1^2 \left[ -\cos j - \frac{1}{r} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dr = \\ &= \int_1^2 \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \frac{1}{r} \right) dr = \frac{\sqrt{2}-1}{2} - \frac{\pi \ln 2}{12}. \end{aligned}$$



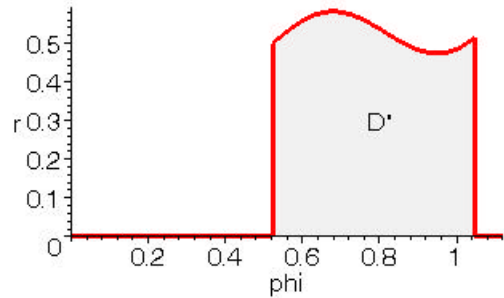
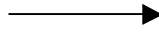
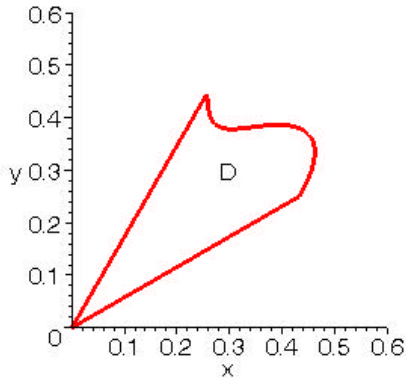


## ANMÄRKNING

Lösning till extrauppgift 14:

**Allmänt:** Ett område  $D$  i  $xy$ -planet som beskrivs med polära koordinater av  $a \leq j \leq b, 0 \leq r \leq f(j)$

blir i  $j$   $r$ -planet  $D'$ :



För arean av  $D$  fås då den välkända formeln:

$$m(D) = \iint_D dx dy = [\text{pol. koord.}] = \iint_{D'} r dr dj = \int_a^b \int_0^{f(j)} r dr dj = \frac{1}{2} \int_a^b (f(j))^2 dj .$$

**Ex:** Descartes' ögla har den polära framställningen  $r = \frac{3 \sin j \cos j}{\sin^3 j + \cos^3 j}$ ,  $j \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , dess area

är alltså  $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{3 \cos j \sin j}{\sin^3 j + \cos^3 j} \right)^2 dj = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 j}{(\tan^3 j + 1)^2 \cos^2 j} dj = \frac{9}{2} \left[ \frac{-1}{1 + \tan^3 j} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$  (generaliserad integral!).

Du har förstås löst uppgiften med Green:

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \int_{\text{Green}} (-y) dx = \left[ \partial D : \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3}, dt = \frac{3(1+t^3-3t^2)}{(1+t^3)^2} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}, 0 \xrightarrow{t} \infty \right] = -9 \int_0^\infty \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} dt = \left[ \frac{t^3}{1+t^3} \right]_0^\infty = \\ &= 3 \int_0^\infty \frac{-1+2x}{(1+x)^3} dx = 3 \int_0^\infty \left( \frac{2}{(1+x)^2} - \frac{3}{2(1+x)^3} \right) dx = 3 \left[ \frac{2}{1+x} - \frac{3}{2(1+x)^2} \right]_0^\infty = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Lika bra går  $\iint_D dx dy = \int_{\partial D} x dy$  eller (enklast?)  $\iint_D dx dy = \frac{1}{2} \left( \int_{\partial D} (-y) dx + x dy \right)$ .