

Datorlaborationer i matematiska metoder E1, del C, vt 2004

1. Laborationerna är ej obligatoriska, men förtjänstfullt utförda lösningar kan ge bonuspoäng (en per uppgift) vid tentamina i matem. met. del C 04-03-08, augusti 03 och januari 05.
2. Laborationerna genomförs individuellt; grupparbete godkänns ej.
3. Lösningarna skall göras veckorna 7/8, häftas ihop och lämnas in till mig fr 20/2 kl. 15.00.
4. Skriv namn och personnummer längst upp på varje inlämnat blad, på första bladet med maple; blad utan namn eller utan personnummer rättas ej.
Lösningarna lämnas tillbaka med övningstentan.

Syfte

Laborationerna skall öka din förståelse för kursens olika moment genom att lära dig att utnyttja datorn för att

- visualisera kurvor och ytor i planet och i rummet, gradientfält, nivåkurvor
- se hur bra Taylorpolynomet (av en eller två variabler) approximerar funktioner .

Uppgift 1 (funktionsytor, gradientfält)

- a)** Rita en funktionsyta $z = f(x, y)$ tillsammans med nivåkurvorna i ytan samt deras projektion i xy-planet. Välj bland följande funktioner (från *DERIVE*):

$$\begin{array}{ll} -\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} & \text{(a pagoda roof),} \\ \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} & \text{(a ridge intersecting a valley),} \\ \frac{100}{50 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 4\right)^2} & \text{(a volcano),} \\ -\frac{y}{8 + x^2 + y^2} & \text{(a mountain and a crater),} \\ y(3x^2 - y^2) & \text{(a monkey saddle),} \\ e^{\frac{-x}{9}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(y)\right) & \text{(a surfer's perfect wave).} \end{array}$$

- b)** Låt $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ (a cliff is born).

Visa utan dator att $f(x, y)$ saknar gränsvärde då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Rita funktionsytan $z = f(x, y)$ med nivåkurvorna i ytan, och sedan endast nivåkurvorna i xy-planet, så att du ser (förstår) bättre vad som händer nära origo.

- c)** Låt $f(x, y) = \frac{6\pi \cos\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{x^2 + y^2 + \pi}$ (sombbrero). Rita i samma figur ytan

$z = f(x, y)$, $x^2 + y^2 \leq (4.4)^2$ och tangentplanet till ytan i punkten $(-1, 1, f(-1, 1))$.

Rita sedan nivåkurvorna och gradientfältet till f för $|x| \leq 5, |y| \leq 5$ i en egen figur.

Uppgift 2 (kurvor, arbete)

Betrakta kurvan $C: \begin{cases} x = (a + b \cos qt) \cos pt, \\ y = (a + b \cos qt) \sin pt, \\ z = c \sin qt \end{cases} \quad 0 \xrightarrow{t} 2\pi \quad (\text{torusknot}),$

då a, b, c, p, q ges av ditt personnummer enligt anvisningarna.

a) Rita C .

b) Beräkna det arbete som kraftfältet $(x - yz, xy + z, xz + y)$ uträttar då en partikel förflyttas från $(x(0), y(0), z(0))$ till $(x(\sqrt{2}), y(\sqrt{2}), z(\sqrt{2}))$ längs C , resp. längs en rät linje.

c) Beräkna längden av kurvbågen mellan $(x(0), y(0), z(0))$ och $(x(\sqrt{2}), y(\sqrt{2}), z(\sqrt{2}))$.

Uppgift 3 (Taylorutveckling)

Låt $f(x) = 3\sin(2x) - 2\cos(3x)$ och P_n = Maclaurinpolynomet till f av grad n .

a) Rita f och P_n för $n = 5, 10, 15, 20$ i samma plot för $-3 \leq x \leq 4$.

b) Prova dig fram till ett n så att P_n är en bra approximation av f för $|x| \leq 4$.

c) Prova dig fram till det största a så att P_{69} är en bra approximation för f för $|x| \leq a$. (a skall anges med en decimal).

d) Låt $f(x, y) = y \ln(1 + x^2 - y)$. Beräkna med *maple* Maclaurinpolynomet $P_6(x, y)$ av grad 6 till $f(x, y)$ och rita funktionsytorna $z = f(x, y)$ och $z = P_6(x, y)$ i samma plot.

Anvisningar, anmärkningar, ledningar:

A. Allmänt

Gå igenom först mina exempel (ev. laborationerna till del A), de flesta ledningarna finns där.

OBS: för alla uppgifter gäller: du får gärna kommentera vad (hur) du gör, men f.f.a. skall du alltid kommentera resultatet (det du fick), gärna handskrivet! Svara på frågorna!

OBS: för alla plot-uppgifter gäller: för att få fram en så bra bild som möjligt måste du experimentera ett tag: vilket område i xy -planet skall du välja (ett rektangulärt område $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ eller andra områden, i *maple* får c och d vara funktioner av x !), vilken plot-”style” (*wireframe, line, patch, contour...*) och vilken färgsättning och belysning (det klickar du enklast fram med musen), vilken noggrannhet (väljes med *grid* = $[n, m]$, default är $n = m = 25$, eller med *numpoints* = k , default är $k = 25 \times 25 = 625$).

Kom ihåg hur derivator skrives, t.ex. för funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$: med $f := (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$ är $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = D[1](f)(x, y) = \text{diff}(f(x, y), x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = D[1, 2](f)(x, y) = \text{diff}(f(x, y), x, y)$

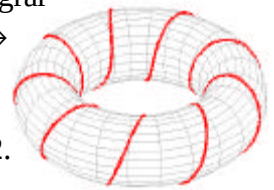
osv., med $f := x^2 + y^2$ skall du skriva $\text{diff}(f, x)$ resp. $\text{diff}(f, x, y)$ osv..

Ytor på parameterform (och dubbelintegraler) behandlas i laborationen till del D.

B. Till uppgifterna

Uppg1: Se ex1. Du kan begränsa de z -värden som skall plottas med `view= zmin..zmax` (bra om f är obegränsad). Glöm inte att lösa (för hand) och kommentera b)! b) bli väldigt tydligt med `filled=true`. Gradientvektorn beräknas med `>grad(f(x,y),[x,y])` och kan ritas med `gradplot` (plots-paketet!). Jag normerade den med `normalize` (ladda in `linalg`-paketet!), för att se pilarna bättre (alla har då längd 1), men tänk på problemet med ev. nollvektorn! Ett fält ritas med `fieldplot` (se del B: riktningsfält till en diff-ekvation). Pilarnas utseende väljer du med `arrows`, försök med `arrows=thick`, är väldigt tydligt (default är `arrows=thin`). En bra framställning får man alltid om man ritas även definitionsområdet (= projektionen av ytan i xy -planet), rita helt enkelt ytan $z = 0$ (eller $z = c$, lämpligt c så att D_f syns).

Uppg2: Ta som a,b,c,p,q de fem första siffrorna i ditt personnummer utom 0 (hoppa över nollor). T.ex. ger 93-12-17-0337 värdena 9,3,1,2,1, persnr. 93-01-10-3506 ger värdena 9,3,1,1,3; har du få många nollor i ditt persnr., så börjar du om från början: 90-01-02-0003 ger värdena 9,1,2,3,9). Kurvan kallas torusknut ty det är en knut som ligger på (slingrar sig runt) en torus (= bilring, se uppg. 3.6). Se t.ex. påföljande persnr (vems?) → Ritar en rymdkurva gör du med `spacecurve` (ladda in `plots`-paketet). Men för att se den bättre, skall du rita den som en slang med `tubeplot`, välj lämplig radie med `radius = ...`; glöm ej `scaling = constrained` (så att slangen är rund). Se ex2.



För att beräkna kurvintegralen $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$ beräknar du skalärprodukten m.h.a.

`dotprod` (ladda in `linalg`-paketet), se ex2. Obs: ange korrekt ekvation för "sträckan"! Räkna numeriskt (först `Int(...)`, sedan `evalf`, skriv 0.0 i.st.f. 0 (kan ta lång tid annars).

Uppg.3: Taylorutvecklingen till $f(x)$ kring a med n termer (resttermen på ordoform) får du med `>taylor(f(x), x=a, n+1)`, n är den globala variabeln `Order` för serieutvecklingar (default är $n = 6$). Läs `>?Order` i `maple` för att förstå hur `maple` räknar. Taylorpolynomet får du med `convert...` Se ex3.

a) rita de olika polynomen med olika färger tillsammans med f i en figur (med `display`)!

b),c) skall du lösa med `maples` hjälp; glöm ej att svara (minsta $n = ..$, största $a = ...$)!

Kommentera (det du fick)!

d) för en funktion f av flera variabler får du Taylorpolynomet kring $(a,b,c,...)$ med resttermen av ordning n med `>mtaylor(f(x,y,z,...), [x=a,y=b,z=c,...], n+1)`, default är $a=b=c=...=0$, $n=6$. I tidigare `maple`versioner måste detta "multivariate taylorpolynom" laddas in med `>readlib(mtaylor)`. För att se skillnaden mellan ytorna får du experimentera ett tag (tänk med, men f.f.a. $D_f = ??$), rita i olika färger (med `display`). Se ex3.

Anm: här är det väldigt lämpligt att rita "animerat", se mitt ex. (gjort med `insequence = true`); läs även online-hjälpen om `animate` och `display`.

Litteraturtips:

Robert B.Israel: Calculus The Maple Way (Addison-Wesley, 96)

Lycka till !

Bernhard, februari 2004

