CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del C, 2005–01–14, kl. 14.00–18.00

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon:, tel. 073–9779268

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

1. Låt $f(x,y)=\dfrac{\cosh y}{\cosh x}$.

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(\ln 2,\ \ln 2, 1)$. (4p)

b) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(\ln 2,\ \ln 2)$ i riktningen $(-2,3)$. (3p)

c) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (4p)

d) Beräkna volymen av kroppen $\{(x,y,z): 0\le x\le \ln(\sqrt{3}),\ 0\le y\le \ln(2),\ 0\le z\le f(x,y)\}$. (4p)

2. Låt $u=\sqrt[4]{x^2+y^2}$, $v=\arctan\frac{y}{x}$ och $D=\{(x,y): x>0,\ y>0\}$.

a) Visa att tillordningen $(x,y)\mapsto(u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt $(x,y)\in D$. (2p)

b) Lös problemet $xf'_y - yf'_x = \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $f(x,x)=x^2$, $(x,y)\in D$. (5p)

3. Bestäm det största och det minsta värde som funktionen $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2-2(xy)^2$ antar på cirkelskivan $x^2+y^2\le 4$. (6p)

4. Beräkna längden av kurvan $C: \boldsymbol{r}(t)=\left(t+2\sin^2(t),\, t+2\cos^2(t),\, \sqrt{2}\sin(2t)\right),\ 0\xrightarrow{t}3\pi$. (4p)

5. Låt $\mathbb{F}=\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}},\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)$.

a) Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$? (2p)

b) Beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs cirkeln $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ ett varv moturs. (4p)

6. Låt $f(x,y)=\dfrac{xy+y^3}{x^2+y^2}$ för $(x,y)\neq(0,0)$ och $f(0,0)=0$.

Är f partiellt deriverbar i origo? Är f differentierbar i origo? (4p)

7. **a)** Formulera implicita funktionssatsen. (2p)

b) Formulera och bevisa Taylors formel för en funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. (6p)

BB

CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del C, 2004–08–20, kl. 8.45–12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Erik Broman, tel. 073–9779268
OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

1. Låt $f(x,y) = x^3 \cos y - y \sin x$.

a) I vilken riktning växer funktionsvärdena snabbast i punkten $(1,1)$ och hur stor är den maximala ökningen i denna punkt? (3p)

b) Bestäm en normalvektor till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,1,\cos 1 - \sin 1)$. (3p)

c) Visa att origo är en stationär punkt till f och bestäm dess karaktär. (4p)

d) Visa att nivåkurvan $f(x,y) = \cos 1 - \sin 1$ är en funktionskurva $y = g(x)$ i en omgivning av punkten $(1,1)$ och bestäm $g'(1)$. (3p)

2. Beräkna volymen av kroppen
$K = \left\{(x,y,z) : 0 \le \arctan\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{4} \le z \le \frac{4\pi - 3}{12}\right\}$. (6p)

3. Vilka värden antar $f(x,y) = \dfrac{3x+4y}{1+x^2+y^2}$ (x,y reella tal)? (7p)

4. Låt $\mathbb{F} = (\cos(x)\cos(y), -\sin(x)\sin(y))$
och $C : \boldsymbol{r} = (-\cos(t)\cosh(t), \sin(t)\sinh(t)),\ 0 \xrightarrow{t} \pi$.

a) Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$? Om ja, bestäm en potential till $\mathbb{F}$ i $\mathbb{R}^2$. (4p)

b) Beräkna $\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$. (2p)

c) Beräkna arean av området mellan C och x-axeln. (4p)

5. Låt $\mathbb{F} = \left(e^{x^2+x-y^2-y}, e^{x^2+x-y^2-y}\right)$. Beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan $C : |x| + |y| = 1$ ett varv moturs. (6p)

6. a) Definiera öppen mängd i $\mathbb{R}^n$. (2p)

b) Formulera och bevisa kedjeregeln för en funktion $f(x(t), y(t))$. (6p)

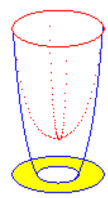
BB

Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2002–08–23, kl. 8.45–12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: , tel. 0740–459022
OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

1. Låt $f(x,y)=3x^3+y^3-2xy$.
a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(1,1,2)$. (4p)
b) Visa att origo är en stationär punkt och bestäm dess karaktär. (2p)
c) Nivåkurvorna $C_1: f(x,y)=2$ och $C_2: x^4+2y^3+x^2y=4$ skär varandra i punkten $(1,1)$. Bestäm vinkeln mellan C_1 och C_2 i denna punkt. (4p)

2. Lös problemet $xf'_x-3yf'_y=2x^2y\sqrt{xy}\sin(xy)$, $f(x,x)=x^2$ $\left(0<x<\sqrt{\pi}, 0<y<\sqrt{\pi}\right)$. (6p)
Ledn.: inför nya variabler $u=x\sqrt{xy}$, $v=\cos(xy)$.

3. Vilka värden antar potentialen $\Phi(x,y,z)=6xy-z^3$ på sfären $x^2+y^2+z^2=5$? (6p)



4. En vas definieras av olikheterna $0\le 3e^{x^2+y^2}-4\le 2z\le 2e^{x^2+y^2}$.
a) Hur mycket vatten ryms i vasen? (3p)
b) Beräkna vasens totala massa då dess densitet är $\rho(x,y,z)=1$. (3p)

5. Låt $\mathbb{F}=\left(3x^2y^2+\frac{\sin x}{1+x^2},\, 2y\left(x^3+e^{-y^4}\right)\right)$.
a) Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2$? (2p)
b) Beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas från $(-2,2)$ till $(2,-2)$ medurs längs ellipsen $2x^2+3y^2=20$. (5p)

6. Beräkna ett numeriskt närmevärde för längden av kurvan $y=\frac{1}{3}x^3, -1\le x\le 1$.
Ledn.: längden ges av en integral som ej är elementär; Maclaurinutveckla dess integrand t.o.m. ordningen 10; feluppskattning krävs ej. (5p)

7. **a)** Definiera öppen mängd i $\mathbb{R}^n$. (2p)
b) Formulera inversa funktionssatsen. (2p)
c) Formulera och bevisa en formel för beräkning av riktningsderivatan av en funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ i en punkt (a,b) i riktningen $\boldsymbol{v}$. (6p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 2002-01-18, kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Fredrik Altenstedt, tel. 0740 - 459022

OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

1. Låt $f(x,y) = (x^3 - y^4)\ln(e - 2 + x^4 + y^4)$.

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,1,0)$. (4p)

b) Vilka värden antar $f'_{\mathbf{v}}(1,1)$ (= riktningsderivatan av f i punkten $(1,1)$ i riktningen $\boldsymbol{v}$), $\mathbf{v} \in \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$? (3p)

2. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x,y) = x^3 - 2xy + 2y^2$ och avgör deras typ. (6p)

3. Låt $\Omega = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0\}$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

a) Visa att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i Ω. (2p)

b) Bestäm en funktion $f(x,y)$ som satisfierar
$x f'_x + y f'_y - 2f = x^3 y \cos(xy)$, $f(x, \sqrt{x}) = 0$ för $(x,y) \in \Omega$. (6p)

c) Beräkna arean av det område i Ω som begränsas av kurvorna
$y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$, $y = \frac{x}{2}$ och $y = 2x$. (4p)

4. Låt $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 + \dfrac{2}{2 - x^2 - y^2}$, $l.e. =$ längdenhet $= dm$.

a) Insidan av ett glas ges av $z = f(x,y)$, $x^2 + y^2 \le 1.21$. Man fyller vatten i glaset tills det står $2\ dm$ högt. Hur mycket vatten finns då i glaset? (4p)

b) Är f differentierbar i origo? (2p)

5. Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F}(x,y) = (2y\sqrt{y}\sinh x + x^3,\ 3\sqrt{y}\cosh x + x)$ uträttar längs kurvan $C: y = \cosh(x),\ -\ln(2+\sqrt{3}) \xrightarrow{x} \ln(2+\sqrt{3})$ (4p).
Beräkna även längden av C (3p). (7p)

6. Visa att funktionen $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\ln(x+1)}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ är deriverbar i origo. (4p)

7. **a)** Definiera inre punkt till en mängd och öppen mängd. (2p)

b) Låt $\mathbb{F}$ vara ett fält som är C^1 i $\mathbb{R}^3$. Visa att om kurvintegralen $\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen i $\mathbb{R}^3$ så är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^3$. (6p)

BB

Tentamen i matematiska metoder E1, TMA042, del C, 1999-03-08, kl 14.15-18.15
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat!

---

1. Låt $F(x,y,z) = \cosh(xz - yz) + \sinh(x + y - z)$ och $P = (1,1,2)$.
a) Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z) = 1$ i punkten P. (4p)
b) Beräkna riktningsderivatan av F i punkten P i riktningen $\vec{v} = (2,1,2)$. (3p)
c) Visa att nivåytan $F(x,y,z) = 1$ lokalt i P är en funktionsyta $z = f(x,y)$. (1p)

2. Beräkna längden av kurvan $C: y^2 = x^3,\ 0 \le x \le 1$ ["Neil's parabel"]. (4p)

3. Bestäm för $0 < |y| < x < 1$ en funktion $z(x,y)$ som är 0 på Neil's parabel (se uppg.2) och satisfierar $x^3 z'_x + x^2 y z'_y = y^2$
[ledn: inför de nya variablerna $u = x^2 - y^2,\ v = x^2 y^{-2}$] . (6p)

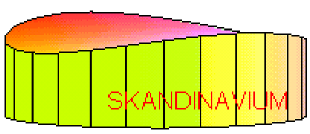
4. Betrakta kroppen $K = \left\{(x,y,z): x^2 + y^2 \le 2500,\ 0 \le z \le 15 + \frac{x^2}{500}\right\}$.
a) Beräkna K:s volym. (4p)
b) Klockan 12 en vacker vårdag var temperaturen i en punkt (x,y,z) på K:s tak $T(x,y,z) = 10^{-3}\left(y^2 - xy + 500z\right)$ [$^{\circ}$ Celsius].
Mellan vilka värden varierade temperaturen på K:s tak då? (6p)
[K:s tak är ytan $\left\{(x,y,z): x^2 + y^2 \le 2500,\ z = 15 + \frac{x^2}{500}\right\}$]

5. Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F}(x,y,z) = (y - z, z - x, -xy)$ uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan
$$C: \begin{cases} x = 50\cos t \\ y = 50\sin t \\ z = 15 + 5\cos^2 t \end{cases},\ -\pi \xrightarrow{t} \pi .$$ (5p)

6. Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^3 i $D: x^2 + y^2 < 1$
och funktionen
$$\frac{f(x,y) - 1 + x^2 + 4xy + 7y^2}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}}$$
är begränsad i D.
Visa att origo är en stationär punkt till f och avgör dess karaktär. (5p)

7. **a)** Vad menas med att en funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i (a,b)? (2p)
b) Definiera konservativt kraftfält. (2p)
c) Formulera Taylors formel för en funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (2p)
d) Formulera och bevisa Greens sats. (6p)

Kroppen K (uppgift 4, 5):



BB

Svar (gamla del C-tentor)

05-01-14:
1a) $3x-3y+5z=5$ **b)** $\frac{3}{\sqrt{13}}$ **c)** $(0,0)$, sadelpunkt, **d)** $\frac{\pi}{4}$
2b) $f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{y}{x}-\arctan\frac{y}{x}+1-\frac{\pi}{4}$ **3)** 0 resp. 16 **4)** $3\pi\sqrt{10}$
5a) nej **b)** 0 **6)** f är partiellt deriverbar men inte differentierbar i origo

04-08-20:
1a) f växer snabbast i riktningen $(\cos 1, -\sin 1)$, maximala tillväxten är 2 **b)** $(2\cos 1, -2\sin 1, -1)$
c) sadelpunkt **d)** $g'(1)=\cot 1$ **2)** $\pi\ln\left(2\cos\frac{1}{4}\right)$ **3)** $V_f=\left[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]$
4a) ja, en potential är $\sin x\cos y$ **b)** $\sin(\cosh\pi)+\sin 1$ **c)** $\frac{1}{4}\sinh^2\pi$ **5)** $4\sinh^2 1$

02-08-23:
1a) $7x+y-z=6$ **b)** sadelpunkt **c)** $\arccos\frac{49}{5\sqrt{170}}=\arctan\frac{6}{7}-\arctan 7$
2) $f(x,y)=x\sqrt{xy}\left(1+\cos(xy)-\cos\left(x\sqrt{xy}\right)\right)$ **3)** $[-15,15]$ **4a)** $\pi(8\ln 2-3)$ **b)** $\pi(2\ln 3-1)$
5a) ja **b)** 64 **6)** $\frac{391}{180}$

02-01-18:
1a) $3x-4y-z=-1$ **b)** $[-5,5]$ **2)** $(0,0)$: sadelpunkt, $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$: lok. minimipunkt
3b) $f(x,y)=\frac{x^2}{2}\left(\sin xy-\sin\left(\frac{x}{y}\right)^3\right)$ **c)** $2\ln 2$ *a.e.* **4a)** $\frac{2\pi}{3}(4-3\ln 2)\ dm^3$ **b)** ja
5) arbetet är $2\left(2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}\right)$, kurvans längd är $2\sqrt{3}$ *l.e.*

99-03-08:
1a) $z=x+y$ **b)** $\frac{1}{3}$ **2)** $\frac{2}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)$ **3)** $z(x,y)=\frac{y^2}{x^2}\ln\frac{x^3}{y^2}$
4a) 40625π **b)** $[\ 7.5^\circ, 11.25^\circ\ ]$ **5)** 1250π **6)** lok. maximipunkt

Lycka till

Bernhard