INSTUDERINGSUPPGIFTER

- Dessa uppgifter skall hjälpa dig vid inlärningen, de skall fungera som ett slags diagnostiskt prov: (hur bra) kan du redan det vi har gått igenom den gångna veckan? Försök först att lösa uppgifterna hemma, skriv ner dina lösningar på ett bra sätt, ta med dem till räknestugan och diskutera dem i smågrupp: är lösningen korrekt? fullständig? bra nerskriven? omständlig? är alla använda begrepp/satser klara? Det viktigaste är inte att du har en korrekt lösning utan att du jobbar med uppgifterna! Diskutera även föreläsningarna, repetitionsfrågorna (de liknar teorifrågorna på tentan och frågorna på "muntan" efter hela ettans matte) och extraövningarna.
- Tänk på att du måste träna att formulera dig, att skriva ner en lösning på ett acceptabelt sätt. Uppgifterna är eller liknar tenta-uppgifter.
- Gå igenom lösningarna (kritiskt), men först **efter** det att du har försökt.

Instuderingsuppgift 1

a) Given är kurvan $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t,\, t^2-4,\, t),\; -2 \xrightarrow{t} 2$.
Beräkna det arbete som kraftfältet $\mathbb{F} = (xy+z,\, \sin x + \sinh y + \cos z,\, xyz)$ uträttar då en partikel förflyttas längs kurvan C.
Beräkna även längden av kurvan C.

b) Är funktionen $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y)}{xy^2}, & \text{då } xy \neq 0 \\ 0, & \text{då } xy = 0 \end{cases}$ kontinuerlig resp. part. deriverbar i origo?

Instuderingsuppgift 2

a) Är funktionen $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y)}{xy^2}, & \text{då } xy \neq 0 \\ 0, & \text{då } xy = 0 \end{cases}$ differentierbar?

b) Låt $F(x,y,z) = \sin(ye^x) + e^{x+2y+4z}$.
- I vilken riktning avtar F snabbast i origo?
- Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan Y: $F(x,y,z) = 1$ i origo, först direkt (med F), sedan genom att beskriva Y som en funktionsyta $z = f(x,y)$ nära origo.

c) Bestäm en funktion $z(x,y)$ som satisfierar $xz'_x - yz'_y = 2$ och $z(x,x) = x^2$ för $(x,y) \in D = \{(x,y): x>0, y>0\}$ (ledn.: inför de nya variablerna $u = \arctan(xy)$, $v = \frac{x}{y}$).

Instuderingsuppgift 3

Funktionen f definieras genom $f(0)=1$ och $f(x)=\dfrac{\arctan x}{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$ för $0<|x|<1$.

Visa att f är deriverbar i 0.

Instuderingsuppgift 4

a) Låt $u=\arctan(xy)$, $v=\dfrac{x}{y}$ för $(x,y)\in D=\{(x,y): x>0, y>0\}$ (uppg. 2c).

Visa att tillordningen $(x,y)\mapsto(u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i D.

b) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)=\ln|2x-1|+\ln|y|+xy-x$ och deras karaktär.

c) Bestäm värdemängden till funktionen $f(x,y)=\dfrac{1+2x+2y}{1+x^2+y^2}$, $D_f=\mathbb{R}^2$.

Instuderingsuppgift 5

a) Beräkna volymen av den kropp som begränsas nedåt av konen $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ och uppåt av sfären $x^2+y^2+(z-1)^2=2$ (“glassmängden”).

b) Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{e^{2x}}{y\left(e^{2x}+1\right)}\,dxdy$, då D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y=2e^{-x}$, $y=3e^{-x}$, $y=\cosh x$ och $2y=\cosh x$.

Instuderingsuppgift 6

a) Låt $\mathbb{F}=\left(\dfrac{4x+2y^2-1}{1+\left(2x+y^2\right)^2}, \dfrac{4xy+2y^3-y}{1+\left(2x+y^2\right)^2}\right)$.

Visa att $\mathbb{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ och beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs spiralen $C:\begin{cases} x=\sqrt{e^{-t}}\cos t \\ y=\sqrt{e^{-t}}\sin t \end{cases}, 0\xrightarrow{t}3\pi$.

b) Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C \tfrac{1}{x}\arctan\tfrac{y}{x}\,dx-\arctan\tfrac{y}{x}\,dy$ där C är den positivt orienterade randen till det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=x$, $y=\sqrt{3}\,x$.

EXTRAUPPGIFTER

1. Låt $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Vi har definierat: M är *öppen* om varje punkt i M är inre punkt i M och M är *sluten* om $\mathbb{R}^n \setminus M$ är öppen. Visa:
M är sluten $\Leftrightarrow$ $\partial M \subseteq M$ (kursbokens definition).

2. Domkyrkan i Ulm har ett $161m$ högt torn med en spiraltrappa som man kan gå upp i. Hur lång tid tar det dig att nå utsiktsplattformen på $150m$ höjd, om du startar i punkten $(\sqrt{3},0,0)$ och går $1km/h$ längs gånglinjen $\mathbf{r}(v) = (\sqrt{3}\cos v, \sqrt{3}\sin v, v)$?

3. Beräkna längden av parabelbågen $y = x^2$ mellan $(1,1)$ och $(2,4)$.

4. Visa att för ett polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$ gäller $a_k = \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$
för $k = 0,1,2,\cdots,n$.

5. Ange Maclaurinpolynomet av grad 8 till $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x^2)}$. Gör tre lösningar:

(a) med ansättningen $f(x) = \sum_{k=0}^{8} a_k x^k + \cdots$, (b) med $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots$ och

(c) med "lång division".

6. Visa att funktionen $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ är C^1 i $|x| < \pi$.

7. Beräkna $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{x} - \dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{\sinh x} \right)$.

8. Visa att för positiva reella tal x, y, z gäller: $xyz = a^3 \Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z) \geq (1+a)^3$.

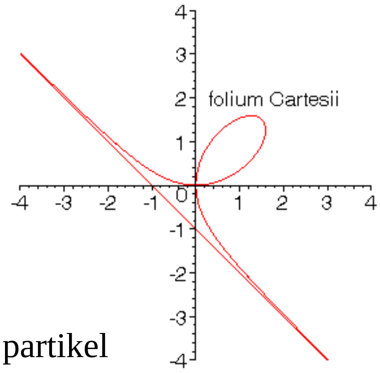
9. Ett plåtkärl har formen av ett rätblock. Plåten i bottenytan kostar 2 öre/cm2 och i de övriga fem sidorna 1 öre/cm2. Vilka mått skall kärlet ha för att rymma maximal volym, då den totala plåtkostnaden uppgår till 36 öre?

10. I vilka punkter på ellipsoiden $Y:\ (x-y)^2 + 2y^2 + 4z^2 = 6$ är det elektriska fältet starkast, resp. svagast, då den elektriska potentialen i punkten (x,y,z) är $\Phi(x,y,z) = x^2 - \sqrt{2}y^2 + \sqrt{6}z^2$ (du skall alltså bestämma de punkter på Y i vilka $|-grad\Phi(x,y,z)|$ antar sitt största, resp. sitt minsta värde).

11. Kroppen K begränsas av xy-planet och ytan $z = 20 - 2x^2 - 3y^2$.
Genom K borras ett cylindriskt hål med z-axeln som borraxel och radien R.
Bestäm R så att den återstående kroppen har hälften så stor volym som K (bortborrad massa = kvarvarande massa).

12. Beräkna $\iint_D e^{xy-x^2-y^2}\,dxdy$ då D är första kvadranten i xy-planet.

13. För vilken enkel, sluten C^1-kurva C uträttar kraftfältet $\left(x^2y+y^3-12y,\,24x-x^3-6xy^2\right)$ det största arbete, då en partikel förflyttas ett varv moturs längs C?



14. Beräkna arean av området inom öglan av kurvan

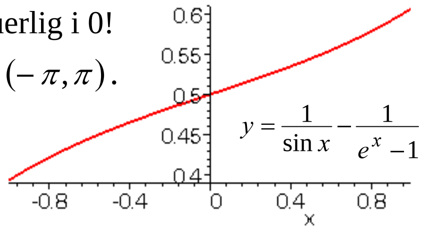
$$C:\begin{cases} x=\frac{3t}{1+t^3} \\ y=\frac{3t^2}{1+t^3}\end{cases},\ -1\neq t\in\mathbb{R} \quad \text{(Descartes' blad).}$$

15. Beräkna det arbete som kraftfältet $\left(2x+3y+xe^{x^2+y^2},\ 2x+3y+ye^{x^2+y^2}\right)$ uträttar då en partikel förflyttas från $(0,0)$ till $(\pi,0)$ längs kurvan $y=\sin x$.

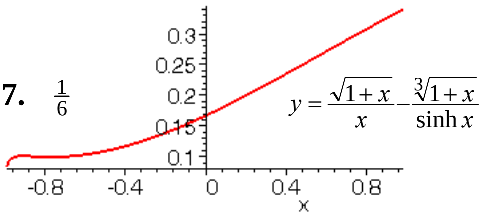
svar till extrauppgifterna:

2. 18 minuter **3.** $\sqrt{17}-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{4}\ln\left(\left(\sqrt{17}-4\right)\left(\sqrt{5}+2\right)\right)$ **5.** $f(x)=1+\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{5x^8}{24}+x^8o(1)$

6. Visa först att $f'(0)=\frac{1}{12}$, sedan att f' är kontinuerlig i 0!
Glöm ej att motivera varför f är C^1 i $0\neq x\in(-\pi,\pi)$.



7. $\frac{1}{6}$



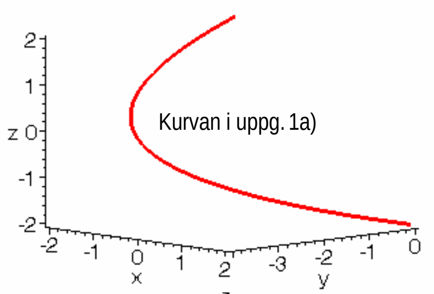
9. $2cm\times 2cm\times 3cm$

10. störst i $\pm\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0\right)$, minst i $\pm(1,-1,0)$

11. $R=\sqrt{8-\sqrt{64-\dfrac{80}{\sqrt{6}}}}$ **12.** $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ **13.** ellipsen C: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

14. $\dfrac{3}{2}$ Du får hela lösningen sid. 9 **15.** $2+\pi^2+\frac{1}{2}e^{\pi^2}$

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 1



a) $A=\int_C \mathbb{F}\bullet d\boldsymbol{r}=\int_{-2}^{2}\mathbb{F}\bullet\boldsymbol{r}'\,dt=$

$$=\int_{-2}^{2}\left(t\left(t^2-4\right)+t,\sin t+\sinh\left(t^2-4\right)+\cos(t),\,t\left(t^2-4\right)t\right)\bullet(1,2t,1)\,dt=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(t\left(t^2-4\right)+t+\left(\sin t+\sinh\left(t^2-4\right)+\cos t\right)2t+t^2\left(t^2-4\right)\right)dt=[\text{utnyttja } \textit{jämn-udda} \text{ !!}]=$$

$$= 2\int_0^2 \left(2t\sin t + t^4 - 4t^2\right)dt = 2\left[2(\sin t - t\cos t) + \tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{4}{3}t^3\right]_0^2 = 2\left(2\sin 2 - 4\cos 2 + \tfrac{32}{15}(3-5)\right).$$

$$L = \int_C ds = \int_{-2}^{2} |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_{-2}^{2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (2t)^2 + 1}\,dt = 2\int_0^2 \sqrt{2\left(1 + 2t^2\right)}\,dt =$$

$$= \left[\sqrt{2}t = u\right] = 2\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+u^2}\,du = [\text{se nedan}] = \left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^{2\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} + \ln\left(2\sqrt{2} + 3\right).$$

Arbetet är alltså $\underline{\tfrac{4}{15}(15\sin 2 - 30\cos 2 - 32)}$ och längden $\underline{6\sqrt{2} + \ln\left(2\sqrt{2}+3\right)}$.

[Den integral du får för att beräkna längden i uppg. 1a) bör du kunna (del A!):
antingen du börjar med partiell integration: $\int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx = x\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} - \int \frac{1}{2}x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x\,dx =$

$= x\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$ osv.,
eller (fiffigast) du substituerar $x = \sinh t$:
$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \cosh t \cosh t\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sinh 2t\right) = \frac{1}{2}(t + \sinh t\cosh t) = \frac{1}{2}\left(\sinh^{-1} x + x\sqrt{1+x^2}\right)$.]

b) f är ej kontinuerlig i origo, ty t.ex. går $f(x,x)$ ej mot $f(0,0) = 0$ då x går mot 0:

$$f(x,x) = \frac{\sin\left(x^3\right)}{x^3} \to 1 \text{ då } (x,x) \to (0,0).$$

Men f är partiellt deriverbar (även) i origo, ty $\dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \dfrac{0-0}{h} = 0 \to 0$ då $h \to 0$

och $\dfrac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \dfrac{0-0}{k} = 0 \to 0$ då $k \to 0$ (dvs. $f_x'(0,0) = f_y'(0,0) = 0$).

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 2

a) Nej, ty f är ej kontinuerlig i origo (instud. 1a), differentierbarhet medför ju kontinuitet)!

b) Svaren fås m.h.a. gradientvektorn:
$gradF = \left(ye^x\cos\left(ye^x\right) + e^{x+2y+4z},\ e^x\cos\left(ye^x\right) + 2e^{x+2y+4z},\ 4e^{x+2y+4z}\right)$, alltså är
$gradF(0,0,0) = (1,3,4)$ och vi får: F avtar snabbast i riktningen $\underline{-(1,3,4)}$ och
tangentplanet har ekv. $gradF(0,0,0) \bullet (x-0, y-0, z-0) = 0$, alltså $\underline{x + 3y + 4z = 0}$.

Vi kan också lokalt kring origo lösa ut z:
$e^{x+2y+4z} = 1 - \sin\left(ye^x\right) \Rightarrow z = \frac{1}{4}\left(\ln\left(1 - \sin\left(ye^x\right)\right) - x - 2y\right) = f(x,y)$ och tangentplanet fås nu
som $z = f(0,0) + f_x'(0,0)x + f_y'(0,0)y$ där $gradf = \frac{1}{4}\left(\frac{-ye^x\cos\left(ye^x\right)}{1-\sin\left(ye^x\right)} - 1, \frac{-e^x\cos\left(ye^x\right)}{1-\sin\left(ye^x\right)} - 2\right)$,
alltså $gradf(0,0) = \frac{-1}{4}(1,3)$ och det ger samma svar s.o..

c) $xz_x' - yz_y' = x\left(z_u'u_x' + z_v'v_x'\right) - y\left(z_u'u_y' + z_v'v_y'\right) = \frac{xy-yx}{1+x^2y^2}z_u' + 2\frac{x}{y}z_v' = 2vz_v' \overset{!}{=} 2$, denna
differentialekvation har den allmänna lösningen $z(u,v) = \ln v + g(u)$ (g en godt. C^1-funkt.),
dvs. (back to x,y): $z(x,y) = \ln\frac{x}{y} + g(\arctan(xy)) = \ln x - \ln y + f(xy)$ (f en godt. C^1-funkt.).
Nu skall $z(x,x) = f\left(x^2\right) = x^2$, det ger $f(t) = t$ och svaret $\underline{z(x,y) = \ln x - \ln y + xy}$.

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 3

Vi skall undersöka om $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\arctan x-\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))}{x\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))}$ har ett gränsvärde då x går mot 0. Vi Maclaurinutvecklar, först nämnaren med bara en term, sedan täljaren t.o.m. samma grad:

$$\frac{\arctan x-\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))}{x\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))}=\frac{x+x^3B_1(x)-\left(x+x^3B_2(x)\right)}{x^2+x^3B_3(x)}=\frac{x^3B_4(x)}{x^2+x^3B_3(x)}=\frac{xB_4(x)}{1+xB_3(x)}\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

(B_k är funktioner som är begränsade i en omgivning av 0, $B_4=B_1-B_2$).

Det visar att f är deriverbar i 0 med $f'(0)=0$.

ANM: $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\tanh^{-1}(x)$ har (den enkla) Maclaurinutvecklingen av grad 3

$$\tfrac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))=\tfrac{1}{2}\left(\left(x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}+x^4B_5(x)\right)-\left(-x-\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x^3}{3}+x^4B_6(x)\right)\right)=x+\tfrac{x^3}{3}+x^4B_7(x).$$

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 4

a) $\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{y}{1+x^2y^2} & \frac{x}{1+x^2y^2} \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{vmatrix}=\frac{-2x}{y(1+x^2y^2)}\neq 0$ i D, inversa funktionssatsen ger påståendet.

b) $\begin{cases} f'_x=\frac{2}{2x-1}+y-1=0 & \Rightarrow \frac{2}{2x-1}=1+\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{3-2x}{2x-1}=\frac{1}{x}\Rightarrow 2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)=0 \\ f'_y=\frac{1}{y}+x=0\Rightarrow y=\frac{-1}{x} & \Uparrow \end{cases}$,

det ger de stationära punkterna $(1,-1)$ och $(-\frac{1}{2},2)$. Deras typ avgörs (ev.) m.h.a. den kvadratiska formen $Q(h,k)=f''_{xx}h^2+2f''_{xy}hk+f''_{yy}k^2$: $f''_{xx}=\frac{-4}{(2x-1)^2}$, $f''_{xy}=1$, $f''_{yy}=\frac{-1}{y^2}$;

i punkten $(1,-1)$: $Q(h,k)=-4h^2+2hk-k^2=-\left((k-h)^2+3k^2\right)$ är negativt definit,

i punkten $(-\frac{1}{2},2)$: $Q(h,k)=-h^2+2hk-\frac{1}{4}k^2=-(h-k)^2+\frac{3}{4}k^2$ är indefinit,

därmed är svaret: $\underline{(1,-1)}$: <u>lokal maximipunkt</u> och $\underline{(-\frac{1}{2},2)}$: <u>sadelpunkt</u>.

c) $\begin{cases} f'_x=\frac{2(1+x^2+y^2)-2x(1+2x+2y)}{(1+x^2+y^2)^2}=0 \\ f'_y=\frac{2(1+x^2+y^2)-2y(1+2x+2y)}{(1+x^2+y^2)^2}=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=y$ (subtrahera!), det ger de stationära punkterna

$(-1,-1)$ och $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ med $f(-1,-1)=-1$ och $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=2$. Om vi räknar med polära koordinater så ser vi att $0\le|f(x,y)|=\dfrac{|1+2r\cos\varphi+2r\sin\varphi|}{1+r^2}<\dfrac{1+4r}{r^2}<\dfrac{5}{r}\le 1$ då $r\ge 5$.

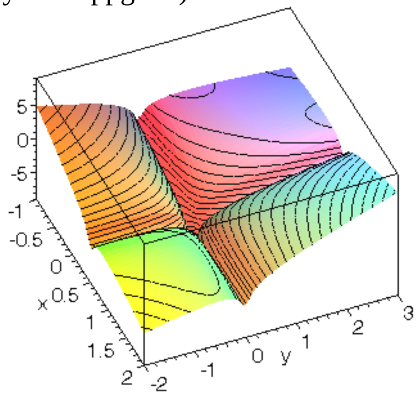
På den kompakta cirkelskivan $\Omega: x^2+y^2\le 25$ (t.ex.) antar den kontinuerliga funktionen f ett minsta och ett största värde (sats 4, sid. 33) och måste göra det i det inre av Ω (ty på randen är $|f|<1$), alltså i en stationär punkt (ty f är C^1), men de enda möjliga punkterna är $(-1,-1)$ och $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (som vi visat ovan), alltså är -1 det minsta värde som f antar och 2 det största värde som f antar. Eftersom $\mathbb{R}^2$ är bågvis sammanhängande och f kontinuerlig så antar f också alla värden mellan -1 och 2 (somv, sats 6 sid. 34). Svaret är därmed $\underline{V_f=[-1,2]}$.

ANM.: I linjär algebra visas att för en kvadratisk form $Q(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2$ gäller:

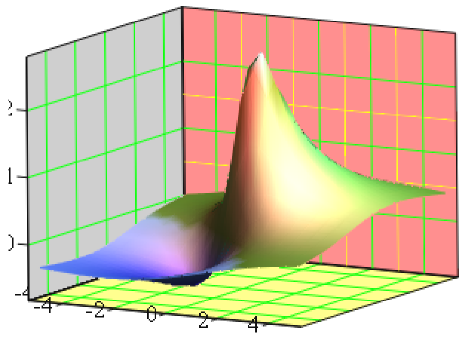
$$Q \text{ är } \begin{cases}\text{positivt definit}\\ \text{negativt definit}\\ \text{indefinit}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix} = AC-B^2 \begin{cases}>0 \text{ och } A>0\\ >0 \text{ och } A<0\\ <0\end{cases} \Leftrightarrow \text{ egenvärdena till} \begin{bmatrix}A & B\\ B & C\end{bmatrix} \text{är} \begin{cases}\text{alla } >0\\ \text{alla } <0\\ \text{ett} >0, \text{ett} <0\end{cases}$$

[egenvärdena till $\begin{bmatrix}A & B\\ B & C\end{bmatrix}$ är rötterna till polynomet $\begin{vmatrix}A-\lambda & B\\ B & C-\lambda\end{vmatrix}$].

ytan i uppg. 4b)



ytan i uppg. 4c)



Lösningsförslag till instuderingsuppgift 5

a) Beräkna först snittet mellan konen och sfären, antingen genom att sätta in $x^2+y^2=\frac{1}{4}z^2$ från konen i sfären, det ger $\frac{1}{4}z^2+(z-1)^2=2 \Rightarrow z^2-\frac{8}{5}z=\frac{4}{5} \Rightarrow \cdots \Rightarrow z=2$, eller genom att sätta in $z=2\sqrt{x^2+y^2}=2r$ från konen i sfären, det ger $r^2+(2r-1)^2=2 \Rightarrow r^2-\frac{4}{5}r=\frac{1}{5} \Rightarrow \cdots \Rightarrow r=1$.
Kroppen $K=\left\{(x,y,z):(x,y)\in D,\ 2\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1+\sqrt{2-x^2-y^2}\right\}$, med $D: x^2+y^2\le 1$, har då volymen $m(K)=\iint_D\left(1+\sqrt{2-x^2-y^2}\right)dx\,dy-\iint_D\left(2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy=$ [pol. koord.]

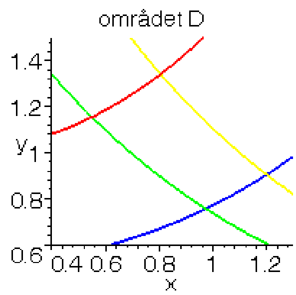
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1+\sqrt{2-r^2}-2r\right)r\,dr\,d\varphi=2\pi\int_0^1\left(r+r\sqrt{2-r^2}-2r^2\right)dr=\pi\left[r^2-\tfrac{2}{3}\left(2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{4}{3}r^3\right]_0^1=\underline{\tfrac{\pi}{3}\left(4\sqrt{2}-3\right)}.$$

b) Gör variabelsubstitutionen $\begin{cases}u=\frac{\cosh x}{y}\\ v=ye^x\end{cases}$, då avbildas D på D': $\begin{cases}1\le u\le 2\\ 2\le v\le 3\end{cases}$, funktionaldeterminanten

är $\begin{vmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\sinh x}{y} & \frac{-\cosh x}{y^2}\\ ye^x & e^x\end{vmatrix}=\frac{e^x}{y}(\sinh x+\cosh x)=\frac{e^{2x}}{y}=\frac{1}{\frac{d(x,y)}{d(u,v)}}$ (>0),

alltså blir $\iint_D \frac{e^{2x}}{y\left(e^{2x}+1\right)}dx\,dy=\iint_{D'}\frac{1}{e^{2x}+1}du\,dv=\left[e^{2x}+1=ye^x\,\frac{e^x+e^{-x}}{y}\right]=$

$$=\int_2^3\int_1^2\frac{1}{2vu}du\,dv=\tfrac{1}{2}[\ln v]_2^3[\ln u]_1^2=\underline{\tfrac{1}{2}\ln 2\ln\tfrac{3}{2}}.$$



Lösningsförslag till instuderingsuppgift 6

a) "Upptäck" att $\mathbb{F}$ är konservativt, antingen genom att visa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4xy+2y^3-y}{1+\left(2x+y^2\right)^2}\right)=\frac{4y\left(1+\left(2x+y^2\right)^2\right)-\left(4x+2y^2-1\right)4y\left(2x+y^2\right)}{\left(1+\left(2x+y^2\right)^2\right)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4x+2y^2-1}{1+\left(2x+y^2\right)^2}\right),$$

eller genom att bestämma en potential Φ:

$$\Phi'_x=\frac{4x+2y^2}{1+\left(2x+y^2\right)^2}-\frac{1}{1+\left(2x+y^2\right)^2}\Rightarrow\Phi(x,y)=\tfrac{1}{2}\ln\left(1+\left(2x+y^2\right)^2\right)-\tfrac{1}{2}\arctan\left(2x+y^2\right)+f(y),\ f\equiv 0$$

duger. Arbetet kan då beräknas som "potentialskillnaden"

$$\Phi\left(-\sqrt{e^{-3\pi}},0\right)-\Phi(1,0)=\tfrac{1}{2}\left(\ln\left(1+4e^{-3\pi}\right)-\ln 5+\arctan 2+\arctan\left(2e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)\right),$$

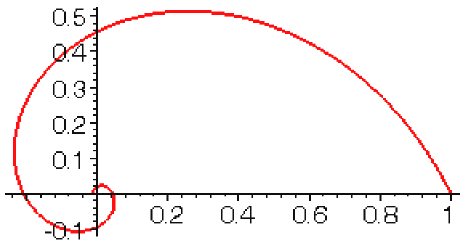
eller genom att välja en enklare väg ($\mathbb{F}$ är C^1 överallt), t.ex. sträckan längs x-axeln:

$y=0,\ x=t,\ 1\xrightarrow{t}-\sqrt{e^{-3\pi}}$, arbetet är då

$$\int_1^{-\sqrt{e^{-3\pi}}}\tfrac{4t-1}{1+4t^2}dt=\tfrac{1}{2}\left[\ln\left(1+4t^2\right)-\arctan(2t)\right]_1^{-e^{-\frac{3\pi}{2}}}=\underline{\tfrac{1}{2}\left(\ln\left(1+4e^{-3\pi}\right)-\ln 5+\arctan 2+\arctan\left(2e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)\right)}$$

som ovan.

kurvan är en spiral:

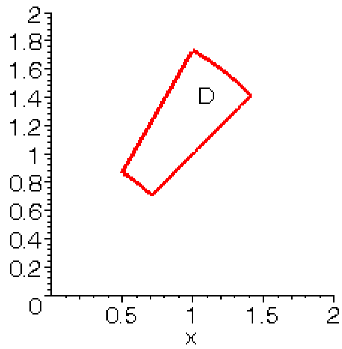


b) Naturligtvis använder vi Greens formel ($\mathbb{F}=(P(x,y),Q(x,y))=\left(\tfrac{1}{x}\arctan\tfrac{y}{x},\ -\arctan\tfrac{x}{y}\right)$ är C^1 i en öppen mängd som innehåller området D som delmängd, orienteringen (positivt = moturs) är den rätta; tyvärr är $\mathbb{F}$ ej konservativt, då vore kurvintegralen längs ∂D noll:

$$\int_{\partial D}P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(Q'_x-P'_y\right)dx\,dy=\iint_D\left(\tfrac{y}{x^2+y^2}-\tfrac{1}{x^2+y^2}\right)dx\,dy=[\text{pol. koord.}]=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_1^2\left(\tfrac{r\sin\varphi}{r^2}-\tfrac{1}{r^2}\right)r\,dr\,d\varphi=\int_1^2\left[-\cos\varphi-\tfrac{1}{r}\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}dr=$$

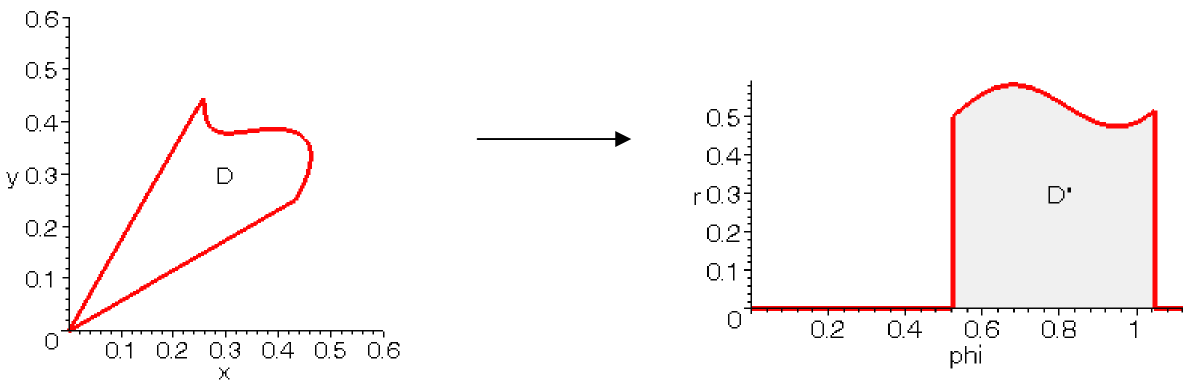
$$=\int_1^2\left(\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}-\tfrac{1}{2}\right)-\left(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\pi}{4}\right)\tfrac{1}{r}\right)dr=\underline{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}-\tfrac{\pi\ln 2}{12}}\,.$$



ANMÄRKNING

Lösning till extrauppgift 14:

Allmänt: Ett område D i xy-planet som beskrivs med polära koordinater av $\alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le r \le f(\varphi)$ blir i φr-planet D':



För arean av D fås då formeln:

$$\underline{m(D)} = \iint_D dx\,dy = [\text{pol. koord.}] = \iint_{D'} r\,dr\,d\varphi = \int_\alpha^\beta \int_0^{f(\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \underline{\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\varphi))^2\,d\varphi}\,.$$

Ex: Descartes' ögla har den polära framställningen $r = \dfrac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, dess area

är alltså $\displaystyle \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}\right)^2 d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\varphi}{(\tan^3\varphi+1)^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{9}{2}\left[\frac{-1}{1+\tan^3\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{3}{2}}$ (generaliserad integral!).

Du har förstås löst uppgiften med Green:

$$\iint_D dx\,dy \underset{\text{Green}}{=} \int_{\partial D} (-y)\,dx = \left[\partial D : \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3},\ dt = \frac{3(1+t^3-3t^3)}{(1+t^3)^2} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases},\ 0 \xrightarrow{t} \infty \right] = -9\int_0^\infty \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt = \left[\begin{matrix} t^3 = u \\ 3t^2 dt = du \end{matrix}\right] =$$

$$= 3\int_0^\infty \frac{-1+2x}{(1+x)^3}\,dx = 3\int_0^\infty \left(\frac{2}{(1+x)^2} - \frac{3}{2(1+x)^3}\right)dx = 3\left[\frac{2}{1+x} - \frac{3}{2(1+x)^2}\right]_0^\infty = \underline{\frac{3}{2}}\,.$$

Lika bra går $\displaystyle \iint_D dx\,dy = \int_{\partial D} x\,dy$ eller (enklast?) $\displaystyle \iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\left(\int_{\partial D} (-y)\,dx + x\,dy\right)$.