

Datorlaborationer i matematiska metoder E1, del C, vt 2005

Syfte

Laborationerna skall öka din förståelse för kursens olika moment genom att lära dig att utnyttja datorn för att

- visualisera kurvor och ytor i planet och i rummet, gradientfält, nivåkurvor
- se hur bra Taylorpolynom (av en eller två variabler) approximerar funktioner.

Uppgift 1 (funktionsytor, gradientfält)

Uppgift 1 skall (med några fina ytor) bygga upp din "föreställningsförmåga": hur ser en yta ut, vad är nivåkurvor, vad är gradientfältet?

- a) Rita en funktionsyta $z = f(x, y)$ tillsammans med nivåkurvorna i ytan samt deras projektion i xy -planet. Välj bland följande funktioner (från *DERIVE*):

$$\begin{array}{ll} -\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \text{ (a pagoda roof),} & \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \text{ (a ridge intersecting a valley),} \\ \frac{100}{50 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 4\right)^2} \text{ (a volcano),} & -\frac{y}{8 + x^2 + y^2} \text{ (a mountain and a crater),} \\ y(3x^2 - y^2) \text{ (a monkey saddle),} & e^{\frac{-x}{9}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(y)\right) \text{ (a surfer's perfect wave).} \end{array}$$

- b) Låt $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ (a cliff is born).

$f(x, y)$ saknar gränsvärde då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ (visa det!).

Rita funktionsytan $z = f(x, y)$ med nivåkurvorna i ytan, och sedan endast nivåkurvorna i xy -planet, så att du ser (förstår) bättre vad som händer nära origo. [Exempel på hur denna (viktiga!) yta kan ritas finns på kurshemsidan!]

- c) Låt $f(x, y) = \frac{6\pi \cos\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2\right)}{x^2 + y^2 + \pi}$ (sombbrero). Rita i samma figur ytan

$z = f(x, y)$, $x^2 + y^2 \leq (4.4)^2$ och tangentplanet till ytan i punkten $(-1, 1, f(-1, 1))$. Rita sedan nivåkurvorna och gradientfältet till f för $|x| \leq 5, |y| \leq 5$ i en egen figur.

Uppgift 2 (kurvor, arbete)

Uppgift 2 skall (med en rolig kurva) visa dig hur enkelt man kan beräkna arbete, längd mm:

$$\text{Betrakta kurvan } C: \begin{cases} x = (9 + 2 \cos 2t) \cos 3t, \\ y = (9 + 2 \cos 2t) \sin 3t, \\ z = 2 \sin 2t \end{cases} \quad 0 \xrightarrow{t} 2\pi \quad (\text{en torusknot}).$$

- Rita C .
- Beräkna det arbete som kraftfältet (yz, xz, xy) uträttar då en partikel förflyttas från $(x(0), y(0), z(0))$ till $(x(\sqrt{2}), y(\sqrt{2}), z(\sqrt{2}))$ längs C , resp. längs en rät linje.
- Beräkna längden av kurvbågen mellan $(x(0), y(0), z(0))$ och $(x(\sqrt{2}), y(\sqrt{2}), z(\sqrt{2}))$.

Uppgift 3 (Taylorutveckling)

Uppgift 3 skall visa dig kvaliteten men även begränsningarna i approximationen av funktioner med Taylorpolynom.

Låt $f(x) = 3\sin(2x) - 2\cos(3x)$ och P_n = Maclaurinpolynomet till f av grad n .

- Rita f och P_n för $n = 5, 10, 15, 20$ i samma plot för $-3 \leq x \leq 4$.
- Pröva dig fram till ett m_0 så att P_{m_0} är en bra approximation av f för $|x| \leq 4$.
- Pröva dig fram till det största a så att P_{69} är en bra approximation för f för $|x| \leq a$.
- Låt $f(x, y) = y \ln(1 + x^2 - y)$. Beräkna med *maple* Maclaurinpolynomet $P_6(x, y)$ av grad 6 till $f(x, y)$ och rita funktionsytorna $z = f(x, y)$ och $z = P_6(x, y)$ i samma figur.

Tips och anmärkningar:

A. Allmänt

Gå igenom först mina exempel (ev. laborationerna till del A), de flesta ledningarna finns där. För alla plot-uppgifter gäller: för att få fram en så bra bild som möjligt måste du experimentera ett tag: vilket område i xy -planet skall du välja (ett rektangulärt område $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ eller andra områden, i *maple* får c och d vara funktioner av x !), vilken plot-"style" (*wireframe, line, patch, contour...*) och vilken färgsättning och belysning (det klickar du enklast fram med musen), vilken noggrannhet (väljes med *grid* = $[n, m]$, default är $n = m = 25$, eller med *numpoints* = k , default är $k = 25 \times 25 = 625$). Kom ihåg hur derivator skrives, t.ex. för funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$: med

$$f := (x, y) \rightarrow x^2 + y^2 \text{ är } \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = D[1](f)(x, y) = \text{diff}(f(x, y), x), \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = D[1, 2](f)(x, y)$$

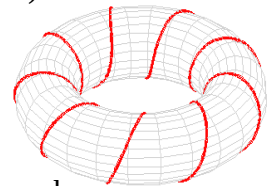
= $\text{diff}(f(x, y), x, y)$ osv., med $f := x^2 + y^2$ skall du skriva $\text{diff}(f, x)$ resp. $\text{diff}(f, x, y)$ osv..

Ytor på parameterform (och dubbelintegraler) behandlas i laborationen till del D.

B. Till uppgifterna

Uppg1: Se ex1. Du kan begränsa de z -värden som skall plottas med `view= zmin..zmax` (bra om f är obegränsad). Gradientvektorn beräknas med `>grad(f(x,y),[x,y])` och kan ritas med `gradplot` (`plots`-paketet!). Jag normerade den med `normalize` (ladda in `linalg`-paketet!), för att se pilarna bättre (alla har då längd 1), men tänk på problemet med ev. nollvektorn! Ett fält ritas med `fieldplot` (se del B: riktningsfält till en diff-ekvation). Pilarnas utseende väljer du med `arrows`, försök med `arrows=thick`, är väldigt tydligt (default är `arrows=thin`). En bra framställning får man alltid om man ritas även definitionsområdet (= projektionen av ytan i xy -planet), rita helt enkelt ytan $z = 0$ (eller $z = c$ med ett lämpligt c så att D_f syns).

Uppg2: Kurvan kallas torusknut ty det är en knut som ligger på (slingrar sig runt) en torus ("bilring", se uppg. 3.6). Ritar en rymdkurva gör du med `spacecurve` (ladda in `plots`-paketet). Men du ser den bättre om du ritas den som en slang med `tubeplot`, välj lämplig radie med `radius = ...`; glöm ej `scaling = constrained` (så att slangen är rund). Se ex2.



För att beräkna kurvintegralen $\int_{\alpha}^{\beta} \mathbb{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) dt$ beräknar du skalärprodukten m.h.a.

`dotprod` (ladda in `linalg`-paketet), se ex2. Räkna numeriskt (först `Int(...)`, sedan `evalf`).

Uppg.3: Taylorutvecklingen till $f(x)$ kring a med n termer (resttermen på ordoform, se appendix A.4 i PB) får du med `>taylor(f(x), x=a, n+1)`, n är den globala variabeln `Order` för serietutvecklingar (default är $n = 6$). Läs `>?Order` i `maple` för att förstå hur `maple` räknar. Taylorpolynomet får du med `convert...` Se ex3.

a) rita de olika polynomen med olika färger tillsammans med f i **en** figur (med `display`)!

b),c) skall du lösa med `maples` hjälp;

d) för en funktion f av flera variabler får du Taylorpolynomet kring $(a,b,c,...)$ med resttermen av ordning n med `>mtaylor(f(x,y,z,...), [x=a,y=b,z=c,...], n+1)`, default är $a=b=c=...=0$, $n=6$. I tidigare `maple`versioner måste detta "multivariate taylorpolynom" laddas in med `>readlib(mtaylor)`. För att se skillnaden mellan ytorna får du experimentera ett tag (tänk med, men f.f.a. $D_f = ??$, $|y|$ måste vara $<1!!$), rita i olika färger (med `display`). Se ex3.

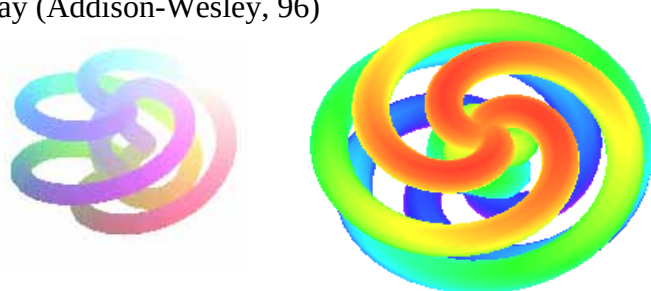
Anm: här är det väldigt lämpligt att rita "animerat", se mitt ex. (gjort med `insequence = true`); läs även online-hjälpen om `animate` och `display`.

Litteraturtips:

Robert B.Israel: Calculus The Maple Way (Addison-Wesley, 96)

Lycka till !

Bernhard, februari 2005



PS:

På kurshemsidan finns även exempel på hur du kan rita ytor, nivåkurvor ... med MATLAB.