

övning 4:20

Vi vill beräkna det största och det minsta värde som en funktion antar i ett område D .

Vad gör man om D inte är kompakt? Jo, det man alltid bör göra: man tänker!

Vi räknar ö 4:20:

Bestäm det största och det minsta värdet av $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(2 + x^2 + y^2)^2}$ i området $D : |y| \leq 1$

Anm: p.g.a. symmetri räcker det att betrakta funktionen i området $D_+ : 0 \leq x, 0 \leq y \leq 1$.

LÖSNING:

A) inre punkter:

$$\begin{cases} f'_x = \frac{2x(2+x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)2(1+x^2+y^2)2x}{(2+x^2+y^2)^4} = 0 \\ f'_y = \frac{-2y(2+x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)2(1+x^2+y^2)2y}{(2+x^2+y^2)^4} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1) x(2+x^2+y^2) - (x^2-y^2)2x = 0 \\ (2) y(2+x^2+y^2) + (x^2-y^2)2y = 0 \end{cases}$$

fall 1: $x = 0$: (2) ger då $2y + y^3 - 2y^3 = y(2 - y^2)$, det ger kandidaten $(0, 0)$ ($\pm(0, \sqrt{2}) \notin D$).

fall 2: $y = 0$: (1) ger då $2x + x^3 - 2x^3 = x(2 - x^2)$, det ger nya kandidaterna $\pm(\sqrt{2}, 0)$.

fall 3: $xy \neq 0$: (1),(2) är då ekvivalenta med $\begin{cases} (1) 2 + x^2 + y^2 - (x^2 - y^2)2 = 0 \\ (2) 2 + x^2 + y^2 + (x^2 - y^2)2 = 0 \end{cases}$, addition visar att det inte finns nya lösningar.

B) randpunkter: för $y = \pm 1$ får vi $f(x, \pm 1) = h(x) = \frac{x^2 - 1}{(3 + x^2)^2}$, $h'(x) = \frac{2x(3+x^2)^2 - (x^2-1)2(3+x^2)2x}{(3+x^2)^4} = 0 \iff x(3+x^2) - (x^2-1)2x = x(5-x^2) = 0$, alltså $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{5}$ och nya kandidater $\pm(0, 1)$, $\pm(\sqrt{5}, 1)$ och $\pm(\sqrt{5}, -1)$.

Så, vad nu? Jo, kolla först vilka värden vi har fått hittills:

$f(0, 0) = 0$, $f(\pm\sqrt{2}, 0) = \frac{2}{(2+2)^2} = \frac{1}{8}$, $f(0, \pm 1) = -\frac{1}{9}$, $f(\pm\sqrt{5}, \pm 1) = \frac{4}{(2+5+1)^2} = \frac{1}{16}$. Aha, det största värdet bland dessa är $\frac{1}{8}$, det minsta värdet är $-\frac{1}{9}$. Kan $f(x, y)$ anta mindre/större värden? Svaret är nej, ty $0 \leq |f(x, y)| \leq$

$\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{x^4}}{\left(\frac{2}{x^2} + 1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$ (för alla $y \in [-1, 1]$) och detta ger att det finns

ett tal M så att $|f(x, y)| \leq \frac{1}{100}$ (t.ex.) för alla $(x, y) \in D$ med $|x| \geq M$. Men nu vet vi ju att den kontinuerliga funktionen f antar på den kompakta mängden $D_M : \begin{cases} -M \leq x \leq M \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$ ett största resp. ett minsta värde, och det måste vara $\frac{1}{8}$ resp. $-\frac{1}{9}$ som vi räknat fram ovan, ty på randen ∂D_M är ju

$|f(x, y)| \leq \frac{1}{100}$; men eftersom $|f(x, y)| \leq \frac{1}{100}$ för alla $(x, y) \in D \setminus D_M$ (dvs. utanför D_M) så är $\frac{1}{8}$ resp. $-\frac{1}{9}$ det största resp. det minsta värde som f antar på D .