CTH&GU, matematik

Tentamen i matematiska metoder E1 (TMA042), del C, 2005–03–14, kl. 14.00–18.00 (V)
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Johan Jansson, tel. 0739–779268
OBS: Fyll i allt på skrivningsomslaget. Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad!

1. Låt $F(x,y,z)=\sinh(\sin(x+z))+\cosh(\sin(y))+x^2+y+z^2$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z)=1$ i origo. (4p)

b) I vilken riktning växer funktionsvärdena snabbast i origo? (2p)

c) Visa att nivåytan $F(x,y,z)=1$ lokalt i origo är en funktionsyta $z=f(x,y)$. (2p)

2. Låt $u=2x^3-3y^2,\ v=3x^2+2y^3$ och $\Omega=\{(x,y):\ x>0, y>0\}$.

Visa att tillordningen $(x,y)\mapsto(u,v)$ är bijektiv lokalt i varje punkt i Ω och lös problemet $y^2 f'_x - x f'_y = \dfrac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}$, $(x,y)\in\Omega$. [Tips: använd u,v som nya variabler] (6p)

3. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna $z=\frac{1}{2},\ z=2$ och $z=\ln(1+x^2+y^2)$. (6p)

4. Vilka värden antar funktionen $f(x,y)=x^3-y^3-3(x-y-1)$ i området $D: 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 3-x$? (6p)

5. Låt $f(x,y)=x^2+e^{-x}y\sin(x+y)$.

a) Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 2 till f. (3p)

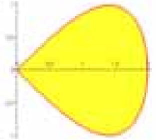
b) Visa att origo är en stationär punkt till f och bestäm dess karaktär. (2p)

6. Låt $\mathbb{F}=\left(\dfrac{x}{1+x^2+y^2}+\dfrac{y}{1+x^2y^2},\ \dfrac{y}{1+x^2+y^2}+\dfrac{x}{1+x^2y^2}\right)$.

a) Visa att $\mathbb{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ genom att beräkna en potential. (4p)

b) Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbb{F}\bullet dr$ där C är kurvan $y=x^3,\ 0\xrightarrow{x}1$. (2p)

7. Beräkna arean av området innanför kurvan $C: \boldsymbol{r}=(2\cos 3t, \sin 6t),\ -\frac{\pi}{6}\xrightarrow{t}\frac{\pi}{6}$. (4p)



8. **a)** Definiera "inre punkt till en mängd $D\subseteq\mathbb{R}^n$". (2p)

b) Visa att om $\mathbb{F}=(P,Q):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ är C^1 och konservativt i $\mathbb{R}^2$ så är $P'_y=Q'_x$ i $\mathbb{R}^2$. (2p)

c) Visa att gradienten till en C^1–funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ i en punkt (a,b) är vinkelrät mot nivåkurvan $f(x,y)=f(a,b)$ i denna punkt. (5p)

BB

svar:

1.a) $x+y+z=0$ **b)** $(1,1,1)$

2. $f(x,y)=6(2x^3-3y^2)+g(3x^2+2y^3)$

3. $\pi\left(e^2-\sqrt{e}-\frac{3}{2}\right)$

4. -15 resp. 21

5. x^2+xy+y^2, origo är lokal minimipunkt

6.a) $\phi(x,y)=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}+\arctan xy$ **b)** $\ln\sqrt{3}+\frac{\pi}{4}$

7. $\frac{8}{3}$ (kurvan kan skrivas som två funktionskurvor: $y=\pm x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$)