REPETITIONSFRÅGOR matem.met. del C för E1, 1999

Moment 1: mängder och funktioner, differentialkalkyl

1. Vad är en öppen/sluten/begränsad/kompakt mängd? Vad är en inre punkt? En randpunkt?

2. Vad är en vektorvärd funktion av n reella variabler (fält)?
Hur definieras gränsvärde för fält? Kontinuitet? Vad är så bra med kontinuitet?

3. Hur definieras partiella derivator för rellvärda funktioner? Riktningsderivata? Differentierbarhet? Differential? Tangentplan? Klassen C^k? Kan du visa att C^1-funktioner är differentierbara? Kedjeregeln? För vilka funktioner f gäller $f''_{xy} = f''_{yx}$?

Vad är gradienten av en funktion? Vad ger den? Bevis?

Moment 2: kurvor, kurvintegral

1. Vad är en (orienterad) kurva (av klassen C^k)? Tangentvektorn? Kurvintegral? Arbete? Kan du motivera dina svar?

2. Vad är båglängdselementet? Längden av en kurva? Kan du motivera dina svar?

Moment 3: Taylorutveckling

1. Vad är Taylorpoynomet (-utvecklingen) av en reellvärd funktion (i en eller flera variabler)? Kan du härleda ”formeln”? Kan du Taylorutvecklingen för de elementära funktionerna?

2. Kan du L’Hospitals regler?

Moment 4: max-min-problem, funktionalmatris, funktionaldeterminant

1. Hur kan man bestämma karaktären av stationära punkter?

2. Vad är funktionalmatrisen (funktionaldeterminanten) av ett fält?
Vad ger funktionaldeterminanten? Kan du inversa och implicita funktionssatsen?

3. Hur hittar man största/minsta värde av en funktion (ev. under bivillkor)?

Moment 5: dubbelintegral, vektoranalys i planet

1. Kan du definiera/beräkna dubbelintegral? Variabelbyte? Generaliserad dubbelintegral?

2. Vad är ett konservativt kraftfält? En potential? En exakt differentialform? Hur kan du visa att ett fält är konservativt? Kan du (formulera, bevisa) Greens formel?

Lycka till !

Bernhard

EXTRAUPPGIFTER

1. Domkyrkan i Ulm har ett $161m$ högt torn med en spiraltrappa som man kan gå upp i. Hur lång tid tar det dig att nå utsiktsplattformen på $150m$ höjd, om du startar i punkten $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0,0\right)$ och går $1km/h$ längs gånglinjen $r(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos t, \sin t, \sqrt{3}\,t\right)$?

2a) För vilken enkel, sluten C^1-kurva uträttar kraftfältet $\left(x^2y + y^3 - 12y,\ 24x - x^3 - 6xy^2\right)$ det största arbete, då en partikel förflyttas ett varv moturs längs C?

b) Beräkna det arbete som kraftfältet $\left(2x + 3y + xe^{x^2+y^2},\ 2x + 3y + ye^{x^2+y^2}\right)$ uträttar, då en partikel förflyttas från $(0,0)$ till $(\pi,0)$ längs kurvan $y = \sin x$.

3. Lös differentialekvationen $xu'_x + yu'_y + zu'_z = 0$ (ledn: Inför rymdpolära koordinater).

4. Visa att för alla positiva reella tal x,y,z gäller: $xyz = a^3 \Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z) \geq (1+a)^3$.

5. Ett plåtkärl har formen av ett rätblock. Plåten i bottenytan kostar 2 öre/cm^2 och i de övriga fem sidorna 1 öre/cm^2. Vilka mått skall kärlet ha för att rymma maximal volym, då den totala plåtkostnaden uppgår till 36 öre?

6. Kroppen K begränsas av xy-planet och ytan $z = 20 - 2x^2 - 3y^2$. Genom K borras ett cylindriskt hål med z-axeln som borraxel och radien R. Bestäm R så att den återstående kroppen har hälften så stor volym som K (bortborrad massa = kvarvarande massa).

7. Maclaurinutveckla $f(x) = \dfrac{1}{\cos\left(x^2\right)}$; ta med termer t.o.m. 8.de graden. Ge tre lösningar:

a) med ansättningen $f(x) = \sum_{k=0}^{8} a_k x^k + \cdots$ **b)** med $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots$

c) med ”lång division”. [vilken lösning tyckte du bäst om ??]

Beräkna sedan med hjälp härav $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^4 \sin\left(2x^2\right)}{1+\cos\left(x^2\right)\left(\ln\left(1+x^2\right) - \left(1+x^2\right)\right)}$.

svar:

1: 18 minuter **2a):** Ellipsen C: $\frac{x}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ **b)** $2+\pi^2+\frac{1}{2}e^{\pi^2}$

3: $u(r,\varphi,\theta)=f(\varphi,\theta)$ **5:** $2cm\times 2cm\times 3cm$

6: $R=\sqrt{8-\sqrt{64-\sqrt{\frac{80}{\sqrt{64}}}}}$ **7:** $1+\frac{x^4}{2}+\frac{5x^8}{24}+x^8 o(1), \quad \lim_{x\to 0} f(x)=6$