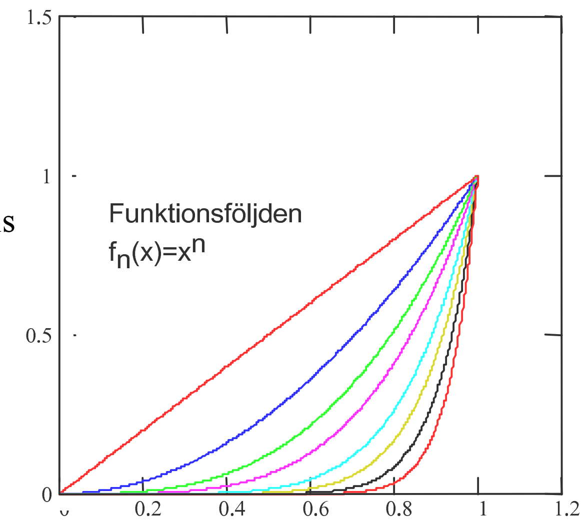
Något om funktionsföljder/funktionsserier

1. Punktvis och likformig konvergens

Vi betraktar reellvärda funktioner med gemensam definitionsmängd $D \subset \mathbb{R}$, $M \subset D$. Men (nästan) allt går helt analogt för komplexvärda funktioner (av en komplex variabel).

DEF Vi säger: FUNKTIONSFÖLJDEN f_n KONVERGERAR PUNKTVIS MOT f PÅ M, och skriver $f_n \to f$ punktvis på M, om $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ för alla $x \in M$. f kallas gränsfunktionen till $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

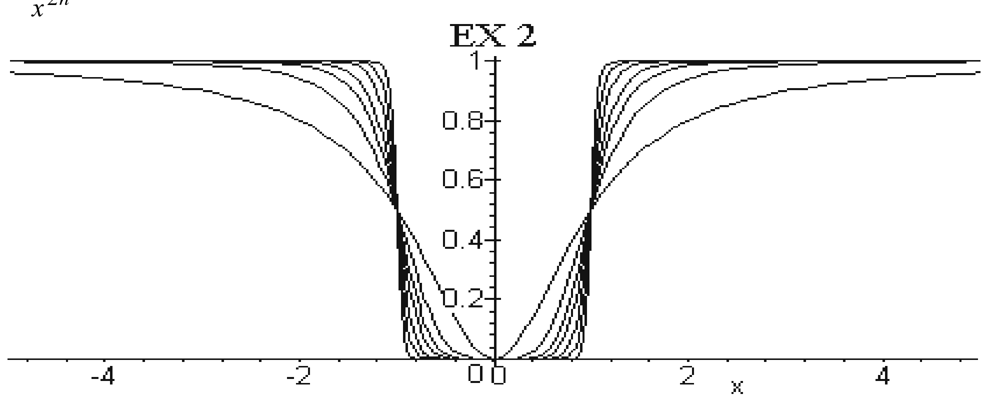


EX 1 $f_n(x) = x^n$, $M = [0,1]$:
för $x = 1$ gäller $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$ och för $0 \le x < 1$ gäller $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, alltså konvergerar x^n punktvis på $[0,1]$ mot $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{då } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{då } x = 1 \end{cases}$.

EX 2 $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$, $M = \mathbb{R}$:

$f_n(\pm 1) = \frac{1}{1+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$, $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, för $|x| < 1$: $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{x^{2n}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0}{0+1} = 0$,
och för $|x| > 1$: $f_n(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x^{2n}}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{0+1} = 1$, alltså konvergerar f_n punktvis mot

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{då } |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{då } |x| = 1 \\ 1, & \text{då } |x| > 1 \end{cases}:$$



Frågan är nu, vilka egenskaper (kontinuerlig, deriverbar, integrerbar..) överförs från f_n till gränsfunktionen f, mera precist: gäller

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right),\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\quad \text{och}\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx,$$

dvs: får man byta "ordningen av gränsvärdena "?

Svaret är nej, som exemplena ovan visar. Det krävs något mer än "konvergens i varje punkt": f_n konvergerar punktvis mot f på M, om det till varje $\varepsilon>0$ och till varje $x \in M$ finns ett $N_0(\varepsilon,x)$ (N_0 beror på ε och x !), så att $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ för alla $n>N_0(\varepsilon,x)$.

Det som krävs för att svaret skall vara ja, är att man till varje $\varepsilon>0$ kan hitta ett $N_0(\varepsilon)$ som duger för alla $x \in M$:

DEF Vi säger: f_n KONVERGERAR LIKFORMIGT MOT f PÅ M, och skriver $f_n \to f$ likformigt på M, om det till varje $\varepsilon>0$ finns ett $N_0(\varepsilon)$ så att för alla $x \in M$ och $n>N_0(\varepsilon)$ gäller att $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

ANM a) Likformig (eng: *uniform*) konvergens är starkare än punktvis (eng: *pointwise*) konvergens: $f_n \to f$ likformigt på $M \Rightarrow f_n \to f$ punktvis på M, men omvändningen är fel, som våra exempel och följande sats visar.

b) Vi säger: f_n är punktvis, resp likformigt, konvergent på M, om det finns en funktion f så att f_n konvergerar punktvis, resp likformigt, mot f på M.

Då kan vi nu visa att likheterna ovan gäller för likformigt konvergenta funktionsföljder :

SATS 1

Föruts: $f_n \to f$ likformigt på $[a,b]$ och alla f_n är kontinuerliga på $[a,b]$.

Påst: a) f är kontinuerlig på $[a,b]$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$.

Bev: a) Vi skall visa att till $x_0 \in [a,b]$ och godt. $\varepsilon>0$ finns δ så att $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ för alla $x\in[a,b]$ med $|x-x_0|<\delta$:

Eftersom f_n konvergerar likformigt mot f på $[a,b]$, så finns ett N_0 så att för alla $x\in[a,b]$ och $n>N_0$ gäller : $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$; för t.ex. $n_0=N_0+1$ gäller (eftersom f_{n_0} är kontinuerlig) att det finns ett δ så att $|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ för $|x-x_0|<\delta$ och då gäller för dessa x: $|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-f_{n_0}(x)+f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)+f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|\leq$

$\leq|f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|\leq\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$. vsv

b) Vi skall visa att till godt. $\varepsilon > 0$ finns N_0 så att för $n > N_0$ gäller:

$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$: Eftersom f_n konvergerar likformigt mot f på $[a,b]$, så finns ett N_0 så att för alla $x \in [a,b]$ och $n > N_0$ gäller : $\left|f(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$; men då gäller för $n > N_0$:

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)dx\right| \le \int_a^b \left|f_n(x)dx - f(x)\right|dx \le \tfrac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon . \qquad \text{vsv}$$

SATS 2

Föruts: $f_n \in C^1\big((a,b)\big)$, f_n konvergerar likformigt mot g i (a,b) och $\big(f_n(x_0)\big)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent för något $x_0 \in (a,b)$.

Påst: f_n konvergerar likformigt mot en C^1-funktion f i (a,b) och $f \; = g$,

dvs: $\Big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\Big) \; = \lim\limits_{n\to\infty}\big(f_n(x)\big)$ för alla $x \in (a,b)$.

Bev: g är kontinuerlig (sats1) i (a,b); sätt $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ och för $x \in (a,b)$

$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$. Funktionen f är C^1 med $f \; = g$ i (a,b). Kvar att visa:

f_n konvergerar likformigt mot f i (a,b):

Eftersom f_n konvergerar likformigt mot g i (a,b) så finns till godt. $\varepsilon>0$ ett N_1 så att för alla $t \in (a,b)$ och $n>N_1$ gäller $\left|f_n(t) - g(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$; vidare finns ett N_2 så att för $n>N_2$ gäller $\left|f_n(x_0) - f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ (ty $f_n(x_0) \to f(x_0)$). Men då gäller för $n>N_0 := \max\{N_1,N_2\}$ och alla $x \in (a,b)$ att

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt - \left(f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt\right)\right| \le$$

$$\le \left|f_n(x_0) - f(x_0)\right| + \left|\int_{x_0}^{x}\big(f_n(t) - g(t)\big)dt\right| \le \left|f_n(x_0) - f(x_0)\right| + \int_{x_0}^{x}\left|\big(f_n(t) - g(t)\big)\right|dt \le$$

$$\le \left|f_n(x_0) - f(x_0)\right| + \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_{x_0}^{x} dt \le \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dt = \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{vsv}$$

En tillfredsställande behandling av likformig konvergens kräver "*supremum*"-begreppet. Men vårt intresse gäller huvudsakligen funktionsserier, och för dessa har vi Weierstraß' kriterium, vilket man klarar sig långt med. Först en självklar "kom ihåg"-definition:

2. Funktionsserier

DEF Låt u_k vara funktioner med gemensam definitionsmängd D och $M \subset D$. Vi säger: FUNKTIONSSERIEN $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är PUNKTVIS, resp. LIKFORMIGT KONVERGENT PÅ M, om följden av delsummorna $S_N = \sum_{k=1}^{N} u_k$ är punktvis, resp. likformigt konvergent på M.

SATS 3 (Weierstraß' majorantsats)

Om $|u_k(x)| \le a_k$ för alla $x \in M$ och $k \in \mathbb{N}$ och om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, så är funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ absolut och likformigt konvergent på M.

Bev: Låt $\varepsilon > 0$; eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, så finns ett N_0 så att $\sum_{k=N_0+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$ och för $N > N_0$ gäller då $\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - S_N(x)\right| = \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x)\right| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k(x)| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$ (oberoende av x !).

vsv

Observera att det räcker att $|u_k(x)| \le a_k$ gäller f.o.m. något N_0.

EX 3 Funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{x}{k}$ är likformigt konvergent på varje $[-R,R]$ $(0 < R \in \mathbb{R})$, ty $\left|\frac{1}{k} \sin \frac{x}{k}\right| \le \frac{R}{k^2}$ för alla k och $x \in [-R,R]$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R}{k^2}$ är konvergent.

Satserna 1 och 2 ger nu direkt för funktionserier:

SATS 4

Föruts: Funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är likformigt konvergent och alla u_k är kontinuerliga på $[a,b]$.

Påst: a) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är kontinuerlig på $[a,b]$.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)dx$.

SATS 5

Föruts: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är likformigt konvergent i (a,b), $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ är konvergent för något $x_0 \in (a,b)$ och alla $u_k \in C^1((a,b))$.

Påst: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är likformigt konvergent och $\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ i (a,b).

Bev: Delsummorna S_N är kontinuerliga på $[a,b]$, resp. C^1 i (a,b), sats1,2 ger påståendena!

Så, det var allt. Som ett första och viktigt exempel tittar vi på potensserier och visar satserna 1 och 2, sid 12:19 i kursboken (JP). Ett annat viktigt exempel blir Fourierserier.

SATS 6

Föruts: Potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ har konvergensradien $R>0$ och summan $S(x)$ $(|x| < R)$.

Påst: Serien, den termvis deriverade serien och den termvis integrerade serien har samma konvergensradie R och är likformigt konvergenta i $M = \{x : |x| < R\}$.

a) $S\,(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \; S\,(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \cdots$ för $x \in \mathrm{M}$.

b) $\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} c_k x^{k+1}$ för $x \in \mathrm{M}$.

Bev: Låt $0<r<R$. Weierstraß' majorantsats ger att $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ är likformigt konvergent på $[-r,r]$, ty $|c_k x^k| \le |c_k| r^k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^k$ är konvergent $(r < R\,!)$; vidare är $\sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k x^{k-1}$ likformigt konvergent på $(-r,r)$, ty för $|x| < r$ gäller $|k c_k x^{k-1}| = k\left(\frac{|x|}{r}\right)^{k-1} |c_k| r^{k-1} < |c_k| r^{k-1}$ för $k >$ något tillräckligt stort N ($\lim_{k\to\infty} k q^{k-1} = 0$ då $0 < |q| < 1$ och $0 \le q = \frac{|x|}{r} < 1$).
Satserna 4/5 ger påståendena för varje intervall $(-r,r)$; men eftersom varje x med $|x| < R$ ligger i ett sådant intervall $(-r,r)$ (välj t.ex. $r = \frac{|x|+R}{2}$) så är satsen visad. vsv

3. Uppgifter

1) Låt $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$. Är $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ likformigt konvergent på $[0,1]$? [ledn: gäller sats1b ?]

2) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(k^2 x)}{k^2}$ är likformigt konvergent på $\mathbb{R}$ och diskutera vad som händer om du deriverar termvis.

3) Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} cos \frac{x}{k}$ är likformigt konvergent på $\mathbb{R}$. [ledn: derivera termvis, använd sats2]

4) Beräkna $\lim_{x \to 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}\, e^{-kx}}{\sqrt{x+k-1}}$.

5) Visa att $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x+k)^{-2}$ är likformigt konvergent i $[0,1]$ och beräkna $\int_0^1 S(x)dx$.

6) Låt $f_n(x) = ln\left(cos \frac{x}{n}\right)$.

a) Visa att $\sum_{n=3}^{\infty} f_n$ är likformigt konvergent i $(-\pi, \pi)$.

b) Gäller $\left(\sum_{n=3}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=3}^{\infty} f_n(x)$ för $|x| < \pi$?

7) Visa att funktionen f som ges av $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kx}}{(1+k)^2}$ är lösning till

differentialekvationen $y \;\; - 2y \;\; + y = \frac{e^x}{e^x - 1}$, $0 < x$.

svar

1) nej **4)** $\frac{1}{e-1}$ **5)** 1 **6b)** ja

funktionsföljden i uppg.1