

Övningar till Flervariabelanalys

VIII. ANVÄNDNINGAR AV INTEGRALER

1. Ytan Y ges av $x = u \cos(v)$, $y = u \sin(v)$, $z = uv$ där $u^2 \leq v \leq 4$. Beräkna $\iint_Y dS$.
2. Ytan Y ges av $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = uv$, där $0 \leq u + v \leq 1$, $0 \leq u - v \leq 1$. Beräkna arean av Y .
3. Beräkna arean av rotationsytan som fås då $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$ roterar kring x -axeln.
4. Beräkna arean av rotationsytan som fås då $y = \tan x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, roterar kring x -axeln.
5. Beräkna arean av ytan som ges av $x^2 = 2yz$, $0 < x < y$ och $1 < x^2 + y^2 < 9$.
6. Beräkna arean av den del av ytan $z = \sqrt{2xy}$, som ligger ovanför triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(0, 1)$ och $(2, 1)$.
7. Bestäm en ekvation för rotationsytan som uppstår då kurvan $z = e^{\sqrt{x}}$ roterar kring
a) z -axeln b) x -axeln (i xyz -rummet).
8. Bestäm arean av ytan $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ovanför triangeln $0 \leq y \leq x \leq 1$.
9. Beräkna arean av den rotationsyta, som erhålles då $x = t - t^2$, $y = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot t^{3/2}$, $0 \leq t \leq 1$, roterar kring
a) x -axeln, b) y -axeln.
10. Vi betraktar alla cirklar som går genom origo och har sin medelpunkt på hyperbeln $xy = 1$. Beräkna arean av den del av planet genom vilken ingen av dessa cirklar passerar.
11. (a) Beräkna arean av ytan $r = (s \cos \phi, s \sin \phi, s + \phi)$, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$.
(b) Bestäm ytans tangentplan i punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4})$.
12. Beräkna arean av den yta som bildas vid rotation av funktionskurvan $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $0 \leq x \leq 1$, runt x -axeln.
13. Beräkna arean av den yta som bildas vid rotation av funktionskurvan $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, runt x -axeln.
14. (a) Låt $X > 0$ och beräkna arean $A(x)$ av funktionsytan $z = e^{-x} \sin y$, $0 \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq 2\pi$.
(b) Beräkna $\lim_{X \rightarrow +\infty} (A(X) - 2\pi X)$.
15. Givet en sfär S i \mathbf{R}^3 med radien R och två parallella plan som bägge skär sfären S . Låt h beteckna avståndet mellan planen. Visa att arean av den del av sfären S som ligger mellan planen är en funktion av R och h och är oberoende av hur planen ligger i förhållande till sfärens tyngdpunkt.

X. VEKTORANALYS I RUMMET

1. Beräkna $\iint_Y (x + y + z) dS$ där Y är ytan som ges av
 $x = u \cos(v)$, $y = u \sin(v)$, $z = u(\cos(v) + \sin(v))$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v < \pi/2$.
2. Beräkna $\iint_Y (x + 2y) dS$ där Y är triangelytan med hörnen $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 3)$ och $(0, 3, -9)$.
3. Beräkna $\iint_Y \sqrt{2 - y^2 - z^2} dS$, där Y är rotationsytan som fås då $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, roterar kring x -axeln.
4. Beräkna $\iint_Y (x, 0, y) \cdot N dS$, där Y ges av $x = u + v$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ med orientering given av normalen nedåt, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$.
5. Beräkna $\iint_Y (\cos x, -\sin z, 0) \cdot N dS$,
där Y bestäms av $x = u + v$, $y = u^2v$, $z = u - v$, och (u, v) tillhör triangelområdet med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$ och $(2\pi, -2\pi)$. Orienteringen av N är given så att $N \cdot (0, 1, 0) > 0$.
6. Bestäm flödet av fältet $\mathbf{u} = (z, 0, x^2)$ nedifrån genom den del av ytan $z = x^2 + y^2$ som ligger över kvadraten $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ i xy -planet.
7. Beräkna flödet genom ytan $2x + 3y + 6z = 12$, $x, y, z > 0$ för vektorfältet $(18z, -12, 3y)$ (riktningen är bort från origo).
8. Beräkna flödet av $(xy, -x^2, x + z)$ bort från origo genom ytan $2x + 2y + z = 6$, $x, y, z > 0$.
9. Beräkna $\iint_Y (y^3, z^2, x) \cdot \mathbf{N} dS$, där Y är den del av ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger över planet $z = 2x + 1$, orienterad med normalen nedåt.
10. Sök flödet av fältet $\mathbf{u} = (x, y, 0)$ ut genom enhetsfären.
11. Sök totala flödet ut från ytan av tetraedern $x + y + z \leq 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ av fältet $\mathbf{u} = (x^2, y^2, z^2)$
12. Visa att volymen av en kropp K , är lika med $\frac{1}{3} \iint_{\partial K} (x, y, z) \cdot \mathbf{N} dS$, där \mathbf{N} är den utåtriktade enhetsnormalen.
13. $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1\}$.
Beräkna $\iint_{\partial K} (x + yz, y - xz, z - e^x \sin y) \cdot \mathbf{N} dS$
14. Beräkna $\iint_Y (x^2 + y^2, 2y, 3z) \cdot N dS$, där Y ges av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ med normal utåt.

15. Beräkna $\iint_Y u \cdot N \, dS$, $u = (x^2, y^2, z^2 + a^2)$, där Y är halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z > 0$ och $N \cdot (0, 0, 1) > 0$.
16. Beräkna $\iint_Y (4x + y, 0, 2x + 5z) \cdot N \, dS$, där Y är sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ med utåtriktad normal.
17. Beräkna $\iint_Y u \cdot N \, dS$, där $u = (e^{\sqrt{yz}}, 4x + 3y + \sin xz, 1 + z^2)$ och Y ges av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, med uppåtriktad normal.
18. Beräkna $\iint_Y c|r|^{-3}r \cdot N \, dS$, där Y är ellipsoiden $3x^2 + 7y^2 + 13z^2 = 6$ och N pekar utåt.
19. Beräkna $\iint_Y (0, 0, x^2) \cdot N \, dS$, där Y är mantelytan av konen med toppen i $(0, 0, 1)$ och bas $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$. Normalen pekar utåt.
20. Beräkna $\oint_C y \, dx + z \, dy + x \, dz$ där C är skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ och $x + y + z = 0$, orienterad så att integralen blir ≥ 0 .
21. Beräkna $\int_\gamma (y - z) \, dx + (z - x) \, dy + (x - y) \, dz$, där γ ges av $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$ och genomlöps ett varv moturs, sedd från punkten $(1, 0, 1)$.
22. Beräkna $\int_\gamma z \, dx + x \, dy + y \, dz$, där γ , som ges av cirkeln i planet $x + 2y + 2z = 5$ med medelpunkt $(1, 1, 1)$ och radie 3, genomlöps ett varv moturs, sedd från origo.
23. Beräkna $\int_\gamma y \, dx + (2x - z) \, dy + (3x + 2y) \, dz$, där γ är cirkeln i planet $x = z$ med medelpunkt i origo och radie 1, genomlöst så att x avtar då $(0, 1, 0)$ passeras.
24. Beräkna $\int_\gamma x \, dy - y \, dz$, där γ , som ges av $z = x^2 + y^2$ och $z = 2x$, genomlöps ett varv moturs sedd från $(0, 0, 1)$.
25. Beräkna kurvintegralen $\int_C F \cdot dr$, där $F = (xy, y^2z, xz)$ och C är
- kurvan $r = (t^2 + 1, 2t + 1, 3t^2 + 1)$ med $0 \xrightarrow{t} 1$
 - sträckan från $(1, 1, 1)$ till $(2, 3, 4)$.
26. Visa att fältet $\mathbf{u} = ((1 + x)e^{x+y}, xe^{x+y} + 2y, -2z)$ är konservativt genom att finna en potential för det. Beräkna $\int_\gamma \mathbf{u} \cdot dr$, där γ går längs kurvan $(\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.
27. Antag att $F = (2x + 2xy, x^2 + 2yz, y^2 + 3z^2)$. Beräkna: a) $\operatorname{div} F$ b) $\operatorname{rot} F$
 c) (om möjligt) en potential $f(x, y, z)$ till F
 d) $\int_C F \cdot dr$, där C är $x = (t^3 + t)/2$, $y = (t^2 + t)/2$, $z = (t^5 - t^3)/8$; $1 \xrightarrow{t} 2$.

28. Tangentplanet till funktionsytan $z = e^{x-y} + x^2$ i punkten $(1, 1, 2)$ skär paraboloiden $z = x^2 + y^2$ längs en kurva γ . Beräkna $\int_{\gamma} F \cdot dr$ då $F = (z, xy, y)$ och då γ antages positivt orienterad sedd från punkten $(3/2, -1/2, 0)$.

29. Låt C beteckna den ellips längs vilken planet $z = 2x + 2y + 1$ skär paraboloiden $z = x^2 + y^2 + 2$. Kurvan C antages positivt orienterad sedd från punkten $(0, 0, 10)$. Beräkna kurvintegralen $\int_C F \cdot dr$ då

a) $F = \frac{(xy, z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(100-x^2-y^2-z^2)}}$
 b) $F = (x^2y - z, 2xyz, y)$.

30. Beräkna $\iint_{\partial K} F \cdot N dS$, då $F = (xy, x, z)$ och K är den kropp i \mathbf{R}^3 som definieras av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1$, $x^2 + z^2 \leq 1$ och $z \geq 0$ (N betecknar utåtriktad enhetsnormalvektor).

31. Låt kurvan γ i \mathbf{R}^3 vara skärningen mellan konen $2x^2 + y^2 = z^2$ och planet $x + z = 1$. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} x^2y dx + (x - y + z) dy + (z + e^{xz}) dz$, då γ orienteras moturs sedd uppifrån.

32. Beräkna $\iint_Y F \cdot N dS$, där $F = (x, yz, z^2)$, Y är randen till (den sneda) cylindern $(x - z)^2 + y^2 \leq z \leq 1$ och N är den utåtriktade enhetsnormalen till Y .

33. Låt $Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ och } x, y, z \geq 0\}$. Beräkna $\iint_Y F \cdot N dS$, då

$$F = (e^{x^2+y^2+z^2}, x^2y, \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)) \quad \text{och} \quad N = (x, y, z).$$

34. Låt $F = (ye^{xy} + y^2z^3, xe^{xy} + 2xyz^3, 3xy^2z^2)$.

- (a) Beräkna rot F och $\text{div } F$.
- (b) Beräkna $\int_{\gamma} F \cdot dr$, då γ är sträckan från $(0, 2, 0)$ till $(1, 1, 1)$.

35. (a) Kroppen K i \mathbf{R}^3 definieras av olikheten $(x^2 + y^2 + z^2)^3 \leq z$. Beskriv kroppen med hjälp av rympolära koordinater.

(b) Beräkna $\iint_{\partial K} u \cdot N dS$, då $u = (xy^2, x^2y, 1)$, där N betecknar utåtriktad enhetsnormalvektor.

36. (a) Planet $2x - y + 4z = \frac{5}{2}$ skär paraboloiden $z = x^2 + y^2$ längs en kurva γ i rummet. Vilken punkt på kurvan ligger närmast origo?

- (b) Bestäm kurvans tangent i denna punkt.
- (c) Beräkna $\int_{\gamma} u \cdot dr$, då $u = (ye^{xy} + z, xe^{xy}, x)$ och då kurvan γ är positivt orienterad sedd ovanifrån.

37. Betrakta fältet $F = (\frac{x^2}{x+z} + 2x \ln(x+z), 1, \frac{x^2}{x+z})$. Beräkna

- (a) $\iint_Y F \cdot N dS$, där Y är randen till kroppen $1 \leq x + y \leq 4$, $0 \leq x - y \leq 2$, $1 \leq x + z \leq 2$ och där N betecknar utåtriktad enhetsnormalvektor.

- (b) $\int_C F \cdot dr$, där C är kurvan $x = t$, $y = t^3$, $z = 1 + t$ från punkten $(0, 0, 1)$ till punkten $(1, 1, 2)$.

38. Beräkna

$$\int_C (y + z^2)dx + (x^2 + z)dy + (x + y)dz,$$

där C ges av skärningen mellan ytorna $z = 4 - x^2 - y^2$ och $x + y + z = 0$ (genomlöpt ett varv) med en sådan riktning att kurvintegralen blir icke-negativ.

39. Låt C vara en godtyckligt orienterad cirkel i planet $Ax + By + Cz = D$ och sätt

$$F(x, y, z) = (y, 2z, 3x).$$

Beräkna absolutbeloppet av kurvintegralen $\int_C F \cdot dr$.

40. Beräkna

$$\iint_Y \text{rot } F \cdot N \, dS,$$

där $F(x, y, z) = (x^2 - y^2 + 3z, y^2 + z^2 - 2x, z^2 - 2x^2 + y)$ och Y ges av den del av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför ytan $z = 2$ och orienterad så att vektorn $(0, 0, 1)$ bildar spetsig vinkel med enhetsnormalen N till ytan.

SVAR

12. $\frac{\pi}{2}(2 + \sinh 2)$

VIII.

13. $2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$

1. $\frac{5\pi}{3}\sqrt{2}$

14. a) $2\pi\{\sqrt{2} - \sqrt{e^{-2X} + 1} + X + \ln(1 + \sqrt{e^{-2X} + 1}) - \ln(1 + \sqrt{2})\}$
 b) $2\pi\{\sqrt{2} - 1 + \ln 2(\sqrt{2} - 1)\}$

2. $\frac{3}{8} + \frac{5}{32} \ln 5$

3. $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)$

4. $4\pi(\frac{5}{3} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(\frac{3+2\sqrt{2}}{4}))$

X.

5. $2 + \frac{\pi}{2}$

1. $4\sqrt{3}/3$

6. $\frac{5}{3}$

2. $7\sqrt{26}/2$

7. a) $z = e^{\sqrt[4]{x^2+y^2}}$
 b) $x = \frac{1}{4}(\ln(y^2 + z^2))^2$

3. $16\pi/3$

8. $\pi/(2\sqrt{2})$

4. $\frac{5}{3}$

9. a) $\frac{272}{105}\pi\sqrt{2}$ b) $\frac{2\pi}{3}$

5. $8\pi^2$

10. 8

6. $4/3$

11. a) $\frac{\sqrt{3}\pi}{4} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

7. 24

b) $(\sqrt{2}-1)x - (\sqrt{2}+1)y + \sqrt{2}z = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

8. $27/4$

9. 4π
10. $8\pi/3$
11. $81/4$
- 12.
13. $12\sqrt{3}\pi$
14. $\frac{20\pi}{3}$
15. $(3\pi a^4)/2$
16. 12π
17. $7\pi/2$
18. $4\pi c$
19. $\pi/4$
20. $\sqrt{3}\pi a^2$
21. -4π
22. -15π
23. $-\pi\sqrt{2}$
24. 3π
25. a) 37.1 b) $\frac{245}{6}$
26. $1 - \pi^2/4 - e$
27. a) $2(1 + y + 4z)$ b) $(0, 0, 0)$
c) $x^2 + x^2y + y^2z + z^3$ d) 152
28. $-\frac{25}{4}\pi$
29. a) 0 b) $55\pi/4$
30. $8/3$
31. -3π
32. $5\pi/2$
33. $\frac{\pi}{4}(\frac{2}{15} + e + \ln 2)$
34. a) $0, y^2e^{xy} + x^2e^{xy} + 2xz^3 + 6xy^2z$
b) e
35. b) $\frac{\pi}{10}$
36. a) $(1/2, -1/4, 5/16)$
b) $(x, y, z) = (1/2, -1/4, 5/16) + t(1, 2, 0), t \in \mathbf{R}$
c) 0
37. a) $33\ln 2 - 16$ b) $1 + \ln 3$
38. $\frac{27}{2}\pi$
39. $\frac{|2A+3B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\pi R^2$,
där R är cirkelns radie
40. -8π