

TMA 042

Matematik CTH

Tentamensskrivning i Matematiska metoder E1, del D

Datum: 2002-06-01, kl. 14.15 - 18.15.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Axel Målqvist, tel. 0740-459022.

OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

=====

1. Givet är kurvan $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $t \in \mathbb{R}$. Beräkna krökningen $\kappa(t)$ i en godtycklig punkt på kurvan. (4p) Beräkna gränsvärdena $\lim_{t \rightarrow -\infty} \kappa(t)$ och $\lim_{t \rightarrow \infty} \kappa(t)$. Hur ser kurvan ut när $t \rightarrow -\infty$ resp. $t \rightarrow \infty$? (2p)

2. Givet är vektorfältet $F(x, y, z) = (y + z, -xz^3 + x^2y \cos z, xy - x^2 \sin z)$.

(a) Visa att fältet är källfritt. (1p)

(b) Beräkna flödet av F upp genom ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$. (4p)

3. Bestäm konvergensintervallet för potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{1+2n^n} x^n$. (6p)

4.(a) Givet är funktionen $f(x)$, där $f(x) = 1 - |x|$ för $x \in [-1, 1]$ och $f(x) = 0$ för $1 < |x| \leq \pi$. Ge en formel för $f(x)$ på hela intervallet $[-\pi, \pi]$ i termer av Heavisides funktion $\theta(x)$. (1p)

(b) Låt F vara den 2π -periodiska fortsättningen av f , d.v.s. F är 2π -periodisk och $F(x) = f(x)$ på intervallet $(-\pi, \pi]$. Utveckla F i reell Fourierserie. (4p)

(c) I vilka punkter kommer Fourierseriens summa att sammanfalla med F och varför? (1p)

(d) Är Fourierserien likformigt konvergent? Motivera! (2p)

(e) Vad ger Parsevals formel? (2p)

5. Givet är den 2π -periodiska funktionen $f(x)$, där $f(x) = x(\pi - |x|)$ för $|x| \leq \pi$. En av Fourierserierna nedan är f :s Fourierutveckling. Tala om vilken det är **utan att beräkna Fourierkoefficienterna**. Du får poäng för varje serie du eliminerat. Motivera väl! (max 8p)

$$(a) \quad \frac{8}{\pi} \sin x - \frac{4}{3\pi} \sin 3x, \quad (b) \quad \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^4},$$

$$(c) \quad \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^3}, \quad (d) \quad \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^4} - \frac{\cos(2n-1)x}{4(2n-1)^3} \right),$$

$$(e) \quad \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}, \quad (f) \quad \frac{4i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2(2n-1)ix}}{(2n-1)^3}.$$

6. Formulera Gauss' divergenssats. (2p) Visa satsen för ett vektorfält på formen $(0, u_2, 0)$. (5p)

7. Formulera och bevisa Weierstrass' majorantsats. (6p) Ge exempel på hur man använder den. (2p)

/JM