Inledning. Rummet L^2

Jana Madjarova

Fransmannen Joseph Fourier (1768 - 1830) var matematiker, men han ägnade sig också åt politik under de stormiga åren efter franska revolutionen och deltog i Napoleons fälttåg i Egypten. Han löste ett fysikaliskt problem om värmeledning. Det gällde att beskriva temperaturutvecklingen i en kropp som svalnar. Fouriers banbrytande idé bestod i att dela upp temperaturfunktionen i sinus-formade vågor av olika våglängder. Man kan jämföra med uppdelningen av en ton i komponenter av olika frekvenser (grundton och flera övertoner). Även ljusets uppdelning i färger är av detta slag.

Låt oss se närmare på denna uppdelning i sinus- och cosinusfunktioner. Matematiskt sett innebär den att man försöker framställa en given funktion som summa av "enkla" trigonometriska funktioner

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \dots \ .$$

Intuitionen (och enkla argument) säger att om man ska lyckas för en mer eller mindre generell funktion f, måste summan ovan vara oändlig, en s.k. serie. Fourier till ära kallas den funktionens Fourierserie. Om man bara tar med ändligt många termer, antyder figurerna att ju fler termer man tar, desto närmare kommer man $f(x)$. En naturlig fråga man nu ställer sig är: hur generell får f vara, d.v.s. vilka f är summan av sin Fourierserie? En enkel observation är att de trigonometriska funktionerna i högerledet är periodiska med perioden 2π, så att om f inte är det kan likheten ovan inte gälla överallt, vilket illustreras tydligt av figurerna. För övrigt kanske de naturliga kandidaterna är de kontinuerliga funktionerna, d.v.s. de funktioner vars graf man kan rita utan att lyfta pennan. Om de dessutom är ganska "snälla", är vår hypotes sann, men det finns faktiskt kontinuerliga funktioner som inte överallt är summan av sin Fourierserie.

Låt oss nu titta närmare på funktionen från fig. 1 och föreställa oss att den lutande delen i mitten blir allt brantare, ända tills den till slut blir vertikal. Funktionen är då inte kontinuerlig längre (en punkt på x-axeln får inte motsvaras av mer än en punkt på grafen), utan "hoppar till", se fig. 2.

Återigen antyder figuren att man kommer närmare och närmare ju fler termer man tar, men vi ser också något annat, nämligen märkliga små "horn" strax till vänster och strax till höger om hopp-punkten. Det märkligaste är att de verkar finnas kvar, även efter det att man kommit mycket nära funktionen i övriga punkter. Överraskande nog visar det sig att de alltid kommer att finnas kvar, något som kallas för Gibbs' fenomen. Hela den oändliga Fourierseriens summa kommer att vara lika med funktionens högra värde plus ca 9% av "språnget" i det högra hornet, resp. funktionens vänstra värde minus ca 9% av "språnget" i det vänstra hornet (i själva verket 8,9489872...%). Detta fenomen uppträder alltid i punkter där en funktion inte är kontinuerlig.

Vi kan glädjande nog i avsnittet om Fourierserier nämna en betydande svensk insats. Lennart Carleson bevisade 1966 att om bara $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$ är ett ändligt tal, så är f lika med summan av sin Fourierserie nästan överallt i intervallet $[-\pi, \pi]$. Det betyder att om man, bildligt talat, står i begrepp att sätta pennan slumpvis någonstans mellan $-\pi$ och π, så är sannolikheten noll för att hamna där f inte är lika med seriens summa. Av detta faktum följer bland annat att "hornen" som diskuterades tidigare blir allt smalare och deras bredd går mot noll när antalet termer går mot oändligheten.

Det visar sig att den teori för linjära rum vi hittills byggt upp är en mycket lämplig bakgrund för att matematiskt förstå och lära sig arbeta med Fourierserier.

Det finns en stark analogi mellan summor och integraler - det är knappast underligt, eftersom (Riemann)integralerna definieras som gränsvärden av (Riemann)summor. Konkret kan det röra sig om linearitetsegenskaper, triangelolikheten, konvergens av serier resp. generaliserade integraler etc. Låt oss notera att även två av de oftast använda skalärprodukterna påvisar starka likheter. Den första av dem är den "vanliga" skalärprodukten i $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. För att upptäcka analogin, låt oss skriva $x(k)$ istället för x_k när vi betecknar vektorernas koordinater. Det antyder att vi betraktar elementen i $\mathbb{R}^n$ som funktioner, definierade på mängden $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Skalärprodukten får då utseendet $\langle x, y\rangle = \sum_{k\in M} x(k)y(k)$ och vi ser plötsligt att den är mycket lik en annan skalärprodukt vi ofta använt, nämligen $\langle f, g\rangle = \int_I f(t)g(t)dt,\ f, g \in$ (t.ex.) $C(I)$ (de kontinuerliga funktionerna på ett ändligt eller oändligt intervall I.) Det visar sig att $C(I)$ inte är det naturliga linjära rummet för skalärprodukten ovan. En stringent och detaljerad redogörelse går långt utanför ramarna för denna kurs, men vi kan åtminstone försöka ge en uppfattning om hur det "naturliga" linjära rummet V kan tänkas se ut.

I analyskurserna är de flesta (reella) funktioner man sysslar med kontinuerliga och t.o.m. (åtminstone styckvis) deriverbara. I själva verket är en stor del av analysen tillämpbar på långt mer generella objekt. För att en begränsad funktion ska vara (Riemann)integrerbar på ett ändligt intervall är det tillräckligt att den är kontinuerlig, men det är långt ifrån nödvändigt. (För obegränsade funktioner eller på oändliga intervall måste man undersöka de generaliserade integralernas konvergens.) Låt oss därför anta att funktionerna f och g i skalärprodukten vi är intresserade av kan vara diskontinuerliga, men ändå är sådana att integralen existerar (om intervallet är ändligt kan man betrakta funktioner som har språng i ändligt många punkter). För en vektor (funktion) i V definieras begreppet norm (= längd) som $||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Med den konkreta skalärprodukt vi har får vi att $||f||^2 = \int_I f^2(x)dx$. Ett rimligt krav på funktionerna i V är därför att denna integral finns (eventuellt konvergerar som generaliserad integral).

Exempel 1. Om intervallet $I = [-1, 1]$ (vilket är ett begränsat intervall), uppfylls kravet av alla kontinuerliga funktioner på I och dessutom av t.ex. funktionerna $\theta(x)$ och sign (x).

Exempel 2. Funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ uppfyller kravet på intervallet $I = (0, 1)$, integralen ovan konvergerar trots att funktionen är obegränsad i 0 och därmed inte Riemannintegrerbar i egentlig mening utan i generaliserad mening. Samma funktion uppfyller inte kravet om man väljer $I = (1, \infty)$, integralen är divergent i oändligheten.

Det känns därför naturligt att definiera elementen i rummet V som mängden av alla (reellvärda) funktioner, vars kvadrater är integrerbara på I, i egentlig eller generaliserad mening. Tyvärr visar det sig att detta återigen inte är den "rätta" definitionen. Visserligen har man då kommit närmare sanningen, men ett sådant rum skulle leda till samma typ av problem som gör det nödvändigt att introducera irrationella reella tal istället för att nöja sig med rationella. Lite löst förklarat innebär det att man i ett sådant rum skulle kunna konstruera (funktions)följder som ser ut att konvergera, men vars gräns(funktion) inte ligger i rummet. Detta problem går att lösa. Lösningen går ut på att man istället för Riemannintegralen introducerar en ny typ av integral, den s.k. Lebesgueintegralen. Detta är en tämligen komplicerad procedur, som vi avstår från att kommentera här. Vi nöjer oss med att notera att alla Riemannintegrerbara funktioner också är Lebesgueintegrerbara, men ej omvänt. I de fall båda integralerna finns är de lika med varandra (det handlar alltså om en utvidgning av integralbegreppet).

Exempel 3. En funktion som är Lebesgueintegrerbar, men ej Riemannintegrerbar på $[0,1]$ är Dirichlets funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1],\ x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in [0,1],\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

För denna funktion gäller att Lebesgueintegralen $(L)\int_0^1 f(x)dx = 0$, medan det är lätt att övertyga sig om att Riemannintegralen inte finns. Hur fint man än delar in intervallet $[0,1]$ i delintervall kommer varje liten bit att innehålla såväl rationella som irrationella punkter (tal). Det betyder att man för varje indelning kan konstruera både Riemannsummor som är identiskt lika med 1 och Riemannsummor som är identiskt lika med 0, alltså kan inte funktionen vara Riemannintegrerbar. Orsaken till det är att funktionen är diskontinuerlig i varje punkt, medan Riemannintegrerbara funktioner, lite löst talat, inte får vara diskontinuerliga på en alltför stor mängd.

Samma funktion kan hjälpa oss att illustrera det fenomen som diskuterades tidigare, nämligen existensen av funktionsföljder av Riemannintegrerbara funktioner, vars gränsfunktion inte är Riemannintegrerbar. Ordna alla rationella tal i intervallet $[0,1]$ i en följd $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$,[1] och betrakta funktionsföljden $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, där

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1],\ x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}; \\ 0, & x \in [0,1],\ x \notin \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}. \end{cases}$$

Det är uppenbart att $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ för alla $x \in [0,1]$. För alla n är funktionen f_n Riemannintegrerbar, eftersom den är diskontinuerlig i ändligt många (n) punkter och $(R)\int_0^1 f_n(x)dx = 0$. Men som vi såg tidigare är gränsfunktionen f inte Riemannintegrerbar.

I fortsättningen står alltså integraltecknet för en annan typ av integral än tidigare, men vi nöjer oss med att i konkreta exempel betrakta Riemannintegrerbara funktioner.

Definition. Rummet $L^2(I)$ består av alla (komplexa) funktioner på intervallet I, sådana att $(L)\int_I |f(x)|^2 dx < \infty$. Rummet antas vara utrustat med den uppenbarliga linjära strukturen och skalärprodukten $\langle f, g\rangle = (L)\int_I \overline{f(x)} g(x) dx$.

[1]Man kan t.ex. göra så: Börja med alla rationella tal i intervallet, som har nämnare 1; tag sedan alla som har nämnare 2 och som inte redan är listade o.s.v. Man får då följden: $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots\}$. En mängd, vars element kan ordnas i en följd, sägs vara uppräknelig.

Tecknet för belopp och strecket för komplexkonjugat behövs endast om man betraktar komplexvärda funktioner, vilket vi i allmänhet inte kommer att göra här. Bokstaven L i rummets namn kommer från den franske matematikern Lebesgues namn.

Exempel 4. För funktionen från exempel 2 gäller alltså att $f \in L^2(0,1)$, men $f \notin L^2(1,\infty)$. Dirichlets funktion ligger också i L^2 (den sammanfaller uppenbarligen med sin egen kvadrat).

Som om det inte vore nog med problem förefaller det vara något skumt med skalärprodukten. Det fjärde axiomet för skalärprodukt kräver att den enda vektorn med längd 0 är nollvektorn. Men det är mycket lätt att konstruera en funktion som inte är identiskt lika med noll och ändå har L^2-längd 0: Låt $I = [-1,1]$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Uppenbarligen gäller $\int_{-1}^{1} g^2(x)dx = 0$, men g är inte identiskt lika med 0. Problemet består i att integralen inte "ser skillnad" på g och nollfunktionen, den "känner inte av" arean under en enskild punkt. Problemet löser vi genom att helt enkelt betrakta två funktioner som lika varandra i L^2-mening så fort deras skillnad har L^2-längd 0, d.v.s. $f = g$ i $L^2(I) \;\Leftrightarrow\; \int_I |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$.

I fortsättningen kommer intervallet I att antas vara begränsat om inget annat sägs.

Under resans gång har vi märkt att det är en stor fördel att arbeta med linjära rum, som är utrustade med bas (helst ortonormerad sådan). Hittills har vi definierat begreppet bas endast för ändligdimensionella rum. Rummet $L^2(I)$ är oändligdimensionellt, det innehåller alla kontinuerliga funktioner på I och vi vet redan att rummet $C(I)$ är oändligdimensionellt. Det visar sig vara möjligt att introducera en uppräknelig ortogonal bas i $L^2(I)$. Framställningen av en funktion i en sådan standardbas, bestående av sin- och cosfunktioner, kallas för funktionens utveckling i Fourierserie.

Fourierserier

Betrakta det linjära rummet $L^2(-\pi,\pi)$, utrustat med skalärprodukten $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Vi ska visa att funktionerna

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$$

bildar en ortogonalmängd i $L^2(-\pi,\pi)$, d.v.s. att dessa funktioner är parvis ortogonala. Låt oss beräkna skalärprodukterna:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, \qquad \text{för alla} \quad m = 0,1,2,\ldots, \quad n = 1,2,\ldots,$$

ty $\cos mx$ är en jämn funktion, $\sin nx$ är udda och intervallet $(-\pi, \pi)$ är symmetriskt m.a.p. 0;

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(mx + nx) + \cos(mx - nx)) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\sin((m+n)x)}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) = 0 \qquad \text{för} \quad m \neq n;$$

och slutligen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\sin((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{\sin((m+n)x)}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) = 0 \qquad \text{för} \quad m \neq n,$$

alltså är funktionerna i mängden parvis ortogonala. Vi kan också beräkna deras normer:

$$||1||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi;$$

$$||\cos mx||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mx) dx = \frac{1}{2}(2\pi + 0) = \pi;$$

$$||\sin mx||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2mx) dx = \frac{1}{2}(2\pi - 0) = \pi.$$

Mängden

$$M = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

är alltså ortonormerad. En godtycklig delmängd är då också ortonormerad, och därmed linjärt oberoende (se Lemma 2.1, s. 32 i KH).

Definition. En (oändlig) uppsättning vektorer kallas linjärt oberoende om varje ändlig deluppsättning är linjärt oberoende.

Lite löst talat har vi nu visat att funktionerna i mängden M inte är för många för att bilda en bas i $L^2(-\pi, \pi)$. Det återstår då att visa att de inte är för få, d.v.s. att de (i någon mening) genererar hela rummet. Det problemet är betydligt svårare, det är ganska uppenbart att man bör betrakta oändliga summor, alltså serier, vilket kräver en utredning av eventuell konvergens resp. divergens. Vi kommer att utan bevis acceptera att M är en ON bas i $L^2(-\pi, \pi)$ och att endast delvis besvara frågorna som dyker upp i samband med en utredning av seriernas konvergens.

Låt oss nu alltså anta att funktionerna i $L^2(-\pi, \pi)$ kan skrivas som linjärkombinationer av elementen i M, d.v.s.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots,$$

där likheten ska tolkas i $L^2(-\pi,\pi)$-mening, d.v.s. om vi inför beteckningen

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \cdots + a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

så gäller $||S_n - f||_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi}(S_n(x) - f(x))^2dx \to 0$ då $n \to \infty$. (Att den första koefficienten heter $\frac{a_0}{2}$ och inte a_0 är av tekniska skäl som kommer att framgå senare.)

Låt oss, förutsatt att likheten ovan gäller, beräkna koefficienterna $a_0, a_1, b_1, \ldots$. För att göra det, multiplicera skalärt med $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$:

$$1: \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\frac{a_0}{2}dx + 0 = \pi a_0;$$

$$\cos nx: \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0 + a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\, dx + 0 = \pi a_n, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

$$\sin nx: \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\, dx + 0 = \pi b_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Vi kan nu lösa ut koefficienterna och får:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

Vi ser att uttrycket för a_0 fås ur uttrycket för a_n för $n = 0$, vilket var anledningen till att vi kallade koefficienten framför 1 för $\frac{a_0}{2}$ och inte a_0.

Definition. Givet en integrerbar funktion f på intervallet $(-\pi,\pi)$, serien

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

där

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx,$$

kallas **Fourierserien** till f och man skriver

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

Koefficienterna $\frac{a_0}{2}, a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots$, kallas **Fourierkoefficienterna** till f.

Exempel 5. Bestäm Fourierserien till funktionen $f(x) = x$ på $(-\pi,\pi)$.

Lösning: Låt oss beräkna f:s Fourierkoefficienter:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\, dx = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ty funktionen x är udda, $\cos nx$ är jämn och produkten $x\cos nx$ blir därmed udda;

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\frac{-\cos nx}{n}dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}(\pi\frac{-\cos n\pi}{n} - 0) + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}.$$

Vi får alltså

$$f(x) = x \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx.$$

Det är uppenbart att funktionen $f(x) = x$ ligger i $L^2(-\pi,\pi)$. Därför kan vi påstå att

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx \quad \text{i } L^2\text{-mening på} \quad (-\pi,\pi).$$

Det är däremot oklart om $f(x) = x$ sammanfaller med sin Fourierserie i enskilda punkter, d.v.s. om likheten gäller även punktvis. För allmänna funktioner i L^2 är frågan fel ställd, eftersom två funktioner som skiljer sig åt i en enskild punkt betraktas som samma funktion i L^2-mening. Därför är det naturligt att förutsätta vissa kontinuitetsegenskaper innan man försöker besvara frågan.

Definition. En funktion f sägs vara **styckvis kontinuerlig** på ett intervall om f är definierad och kontinuerlig på intervallet utom eventuellt i ett ändligt antal punkter, i vilka f har (ändliga) gränsvärden från vänster och från höger.

Definition. En funktion f sägs vara **styckvis deriverbar** på ett intervall om f är definierad och deriverbar på intervallet utom eventuellt i ett ändligt antal punkter, i vilka f och f:s differenskvot har (ändliga) gränsvärden från vänster och från höger.

Exempel 6. Funktionen

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

är styckvis deriverbar på $(-\infty,\infty)$, ty den är definierad och deriverbar på $(-\infty,0)$ och $(0,\infty)$; den är odefinierad i punkten 0, men såväl funktionen som dess differenskvot har (ändliga) gränsvärden från vänster och från höger i 0:

$$\theta(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\theta(x) = 0; \quad \theta(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\theta(x) = 1;$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\theta(0+h)-\theta(0^-)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\theta(0+h)-\theta(0^+)}{h} = 0.$$

Vi kan nu ge ett svar på frågan som ställdes tidigare:

Sats. Antag att funktionen f är styckvis deriverbar på intervallet $[-\pi, \pi]$. Då är Fourierserien till f konvergent för varje punkt $x \in (-\pi, \pi)$ och har summan $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \frac{1}{2}(\lim_{h\to 0^+} f(x+h) + \lim_{h\to 0^-} f(x+h))$. Speciellt konvergerar Fourierserien mot $f(x)$ i varje punkt där f är kontinuerlig.

Eftersom funktionen $f(x) = x$ är kontinuerlig (och deriverbar) på hela intervallet $(-\pi, \pi)$ kan vi nu säga att den är lika med summan av sin Fourierserie för alla x i det intervallet.

Hittills har allt utspelat sig på intervallet $(-\pi, \pi)$. Om vi tittar på Exempel 5 igen så ser vi att såväl funktionen själv som dess Fourierserie är definierade för alla reella x. En naturlig fråga som inställer sig är: hur väl representeras funktionen av sin Fourierserie utanför $(-\pi, \pi)$? Svaret (i det här fallet) måste tyvärr bli: inte alls. Anledningen till det är mycket enkel, Fourierserien är alltid en 2π-periodisk funktion, medan funktionen själv ($f(x) = x$ i vårt exempel) behöver inte alls vara det. Fourierserien representerar i själva verket en funktion som sammanfaller med f på $(-\pi, \pi)$ och är en 2π-periodisk fortsättning av $f|_{(-\pi,\pi)}$ utanför (se fig. 3). Vi kan nu precisera något satsen som formulerades ovan.

Sats. Antag att funktionen f är styckvis deriverbar på intervallet $[-\pi, \pi]$ och periodisk med perioden 2π. Då är Fourierserien till f konvergent för varje reellt x och har summan $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \frac{1}{2}(\lim_{h\to 0^+} f(x+h) + \lim_{h\to 0^-} f(x+h))$. Speciellt konvergerar Fourierserien mot $f(x)$ i varje punkt där f är kontinuerlig.

Exempel 7. Bestäm Fourierserien till den 2π-periodiska funktion f som på intervallet $[-\pi, \pi)$ sammanfaller med $|x|$. Bestäm Fourierseriens summa för varje reellt x.

Lösning: Funktionen $|x|$ är en jämn funktion och samma kommer uppenbarligen att gälla dess periodiska fortsättning (se fig. 4). Låt oss beräkna f:s Fourierkoefficienter:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\pi^2 = \pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx = 0 + \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\,(-1)^n - 1\,) = \begin{cases} 0, & n \text{ jämnt}, \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n \text{ udda}; \end{cases}$$

$$b_n = 0 \qquad \text{(ty integral över } (-\pi, \pi) \text{ av en udda funktion).}$$

Alla udda tal kan skrivas på formen $2k - 1,\ k \in \mathbb{Z}$ (alla jämna kan i sin tur skrivas på formen $2k,\ k \in \mathbb{Z}$). Eftersom funktionen f uppenbarligen är styckvis deriverbar och kontinuerlig på $(-\infty, \infty)$ så kan vi alltså påstå att

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos{(2k-1)x},$$

både i L^2-mening och punktvis för alla reella x. Speciellt gäller att

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos{(2k-1)x} \quad \text{för alla} \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Låt oss här öppna en liten parentes. Vi har i analyskurserna sett att man med hjälp av vissa kriterier kan uttala sig om numeriska seriers konvergens resp. divergens. Däremot har vi endast i undantagsfall (t.ex. för teleskoperande serier) kunnat säga något om seriens summa. Fourierutvecklingar kan vara användbara i det sammanhanget. Betrakta likheten ovan och sätt in $x = 0$; det ger

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \qquad (\text{ty} \quad \cos 0 = 1),$$

vilket ger

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Tyvärr kan man inte använda denna metod för att bestämma summan av en på förhand given numerisk serie.

Vi har hittills några gånger i exemplen använt oss av udda och jämna funktioners egenskaper. Låt oss sammanfatta:

Om $f(x)$ är en **jämn** funktion, så är $f(x)\cos nx$ också jämn, medan $f(x)\sin nx$ är udda. Detta medför att

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{för alla} \quad n \geq 0; \qquad b_n = 0 \quad \text{för alla} \quad n \geq 1,$$

d.v.s. funktionen f:s Fourierutveckling blir en s.k. **cosinusserie**. Analogt, tar man en **udda** funktion, får man

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad \text{för alla} \quad n \geq 1; \qquad a_n = 0 \quad \text{för alla} \quad n \geq 0,$$

och f:s Fourierutveckling blir en **sinusserie**.

Ibland vill man utveckla en given funktion i cosinus- resp. sinusserie. Naturligtvis är det så att har man en funktion given på hela intervallet $(-\pi, \pi)$ och denna funktion är varken udda eller jämn, så har man inte en chans att lyckas. Antag däremot att vi endast känner till funktionen på halva intervallet, $(0, \pi)$. Det står oss då fritt att fortsätta funktionen som jämn resp. udda på hela intervallet och därefter utveckla i en cosinus- resp. sinusserie. Notera att om man börjar med en styckvis deriverbar funktion så är den jämna resp. udda fortsättningen också styckvis deriverbar (se fig. 5). Låt oss illustrera med ett exempel:

Exempel 8. Utveckla funktionen $f(x) = \cos x$ i sinusserie på intervallet $(0, \pi)$.

Lösning: Funktionen $f(x) = \cos x$ är jämn på varje intervall som är symmetriskt m.a.p. 0. På $(0, \pi)$ däremot är frågan om jämn eller udda meningslös, eftersom x

och $-x$ inte tillhör intervallet samtidigt. Vi kan därför fortsätta $\cos x$ som en udda funktion på $(-\pi,\pi)$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (0,\pi), \\ -\cos(-x), & x \in (-\pi,0). \end{cases}$$

Funktionen $\tilde{f}$ är då udda och dess Fourierutveckling blir automatiskt en sinusserie. Eftersom f och $\tilde{f}$ sammanfaller på $(0,\pi)$ kommer vi därmed att ha fått en sinusutveckling för $\cos x$ på $(0,\pi)$. Konkret i exemplet får vi:

$$(a_n = 0); \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x)\,dx.$$

Vi måste betrakta fallen $n=1$ och $n>1$ separat:

$$n=1: \qquad b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(-1+1) = 0\,;$$

$$n>1: \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-\cos(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{-\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-(-1)^{n+1}+1}{n+1} + \frac{-(-1)^{n-1}+1}{n-1}\right) = \frac{1+(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{n-1+n+1}{n^2-1} =$$

$$= \frac{2(1+(-1)^n)n}{\pi(n^2-1)} = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ \frac{8k}{\pi(4k^2-1)}, & n = 2k\,. \end{cases}$$

Vi har därmed funnit den sökta sinusserien:

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx \quad \text{i } L^2\text{-mening och punktvis för } x \in (0,\pi).$$

Observera att hade vi velat utveckla $\cos x$ i “vanlig” Fourierserie på hela $(-\pi,\pi)$, så hade vi fått $a_1 = 1$ och alla övriga kofficienter lika med noll. Man kan komma fram till den slutsatsen helt utan att räkna, därför att $\cos x$ är en av basfunktionerna och därmed “färdigutvecklad”.

Bessels olikhet. Parsevals formel

Låt oss titta på $U_n = \operatorname{span}\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$. Det är uppenbart att U_n är ett underrum i L^2. De $2n+1$ funktionerna som genererar U_n är ortogonala, därmed linjärt oberoende, och alltså gäller $\dim U_n = 2n+1$. Eftersom U_n är ändligdimensionellt vet vi med säkerhet att man kan ortogonalprojicera på U_n och vi har (givet en ON bas) en formel för ortogonalprojektionen. Vi har tidigare beräknat basfunktionernas norm, en ON bas i U_n är

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\}.$$

Om vi då projicerar en godtycklig funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$ på U_n, får vi (se Sats 2.7, s. 36 i KH):

$$f_{\text{pr}}(x) = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{n}(\langle f, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\rangle \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \langle f, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\rangle \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

där $\frac{a_0}{2}, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ är just de $2n+1$ första koefficienterna i f:s Fourierutveckling. Det betyder att partialsummorna (S_n) i en funktions Fourierserie är funktionens ortogonalprojektioner på de ändligdimensionella underrum, som genereras av motsvarande antal $(2n+1)$ basfunktioner. Detta faktum, kombinerat med tidigare abstrakta resultat (se ss. 35-37 i KH) ger:

(i) Det bästa sättet att approximera en funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$ med en ändlig summa av typen $\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(c_k \cos kx + d_k \sin kx)$ (ett s.k. trigonometriskt polynom), är att välja motsvarande partialsumma i f:s Fourierserie, d.v.s.

$$||f(x) - S_n(x)||_{L^2} = \min ||f(x) - \frac{c_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(c_k \cos kx + d_k \sin kx)||_{L^2}.$$

(ii) Enligt Pythagoras' sats gäller:

$$||f||_{L^2}^2 = ||S_n||_{L^2}^2 + ||f - S_n||_{L^2}^2,$$

varav följer

$$||S_n||_{L^2}^2 \le ||f||_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Funktionen S_n är en ändlig linjärkombination av ortogonala funktioner, vilket gör att dess L^2-norm lätt kan beräknas med hjälp av Pythagoras' sats:

$$||S_n||^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 ||1||^2 + a_1^2||\cos x||^2 + b_1^2||\sin x||^2 + \dots + a_n^2||\cos nx||^2 + b_n^2||\sin nx||^2 =$$

$$= \pi(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)).$$

Denna likhet, i kombination med olikheten mellan $||f||$ och $||S_n||$, ger **Bessels olikhet**:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

(För en abstrakt version av Bessels olikhet, se s. 37 i KH.)

(iii) Varje funktion i L^2 har (naturligtvis) ändlig L^2-norm. Det betyder att partialsummorna till den positiva numeriska serien

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

är uppåt begränsade. Enligt huvudsatsen för positiva serier är serien konvergent och dess summa uppfyller olikheten

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Det visar sig att det i själva verket är likhet som gäller, d.v.s.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Denna likhet kallas **Parsevals formel**. Vad den egentligen säger är att vi kan fortsätta att använda den formel för längd som vi är vana vid från det ändligdimensionella fallet, den gäller trots att det nu handlar om en serie och inte en ändlig summa. Bl.a. följer av Parsevals formel att det inte finns någon funktion f i L^2 sådan att $||f||_{L^2} = 1$ (eller $\neq 0$) och $\langle f, 1\rangle = \langle f, \cos nx\rangle = \langle f, \sin nx\rangle = 0$, så att den enda funktionen vars alla Fourierkoefficienter är 0 är nollfunktionen i L^2. Om vi betraktar Fourierkoefficienterna som en funktions "koordinater", så följer alltså att dessa är entydigt bestämda, precis som i det ändligdimensionella fallet.

(iv) Att serien från (iii) konvergerar betyder bl.a. att dess termer måste gå mot 0. Vi får alltså följande (inte alls uppenbara) resultat:

Om $f \in L^2(-\pi, \pi)$, så gäller att

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0.$$

Exempel 9. Kan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$$

vara Fourierserie till någon funktion i $L^2(-\pi, \pi)$?

Lösning: Nej, därför att $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$.

Exempel 10. Kan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

vara Fourierserie till någon funktion i $L^2(-\pi, \pi)$?

Lösning: Nej, därför att serien

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

är divergent.

Exempel 11. Beräkna summan av serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Lösning: Vi har tidigare visat (Exempel 5) att funktionen $f(x) = x$ har Fourierutvecklingen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$. Parsevals formel ger då:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{3} [x^3]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

vilket i sin tur ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Återigen är det tyvärr så att man inte kan beräkna summan av en på förhand given serie, man måste kunna koppla serien till en Fourierutveckling.

Det finns ett samband mellan f:s kontinuitetsegenskaper och hur snabbt Fourierkoefficienterna går mot 0. Om man t.ex. jämför funktionerna x och $|x|$ och deras Fourierutvecklingar så ser man att den periodiska fortsättningen till x är diskontinuerlig, medan den periodiska fortsättningen till $|x|$ är kontinuerlig; mycket riktigt går den första funktionens Fourierkoefficienter mot 0 betydligt långsammare än den andra funktionens. Försök att (med hjälp av partiell integration) visa följande:

Exempel 12. Om den 2π-periodiska funktionen f har kontinuerlig andraderivata (på hela $\mathbb{R}$), så gäller för dess Fourierkoefficienter a_n och b_n att $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 b_n = 0$, d.v.s. $a_n = o(\frac{1}{n^2}), b_n = o(\frac{1}{n^2})$.

Fourierserier till funktioner med godtycklig period

Låt oss nu betrakta funktioner med godtycklig period T (alternativt T-periodiska fortsättningar till funktioner, definierade på intervall med längden T). Man kan fortfarande Fourierutveckla sådana funktioner. Lämpligt funktionsrum är i det fallet $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ och lämplig ortogonal bas i det rummet

$$1, \cos\frac{2\pi t}{T}, \sin\frac{2\pi t}{T}, \ldots, \cos\frac{2n\pi t}{T}, \sin\frac{2n\pi t}{T}, \ldots .$$

(Lägg märke till att $t = \frac{Tx}{2\pi}$ avbildar intervallet $(-\pi, \pi)$ på $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.) Fourierkoefficienterna blir

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}dt.$$

Satser och formler, analoga till det 2π-periodiska fallet, gäller. Bevisen utförs m.h.a. lämplig variabelsubstitution.

Fouriers metod (Variabelseparation)

Vi ska nu lösa vissa begynnelse- och randvärdesproblem för partiella differentialekvationer med hjälp av den s.k. Fourieranalys som utvecklades i de tidigare avsnitten. Som förut kommer vi att endast flyktigt behandla frågan om konvergens. Dessutom kommer vi inte att diskutera eventuell entydighet.

Betrakta följande problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad \text{i} \quad \Omega, \\ u(x,0) = \phi_0(x), \quad x \in (0,\pi), \\ u(0,t) = \psi_0(t), \quad t \in (0,\infty), \\ u(\pi,t) = \psi_\pi(t), \quad t \in (0,\infty), \end{cases}$$

där $\Omega = \{(x,t) : x \in (0,\pi),\ t \in (0,\infty)\}$ (se fig. 6). Detta problem dyker upp t.ex. vid matematisk modellering av följande fysikaliska problem: Betrakta en tunn stav som är π l.e. lång. Kalla stavens ena ändpunkt 0 och den andra π. Låt $u(x,t)$ vara temperaturen i punkten på avstånd x från 0 ($x \in (0,\pi)$) vid tidpunkten $t > 0$. Antag att man vid varje tidpunkt $t > 0$ håller stavens ändpunkter vid temperatur $\psi_0(t)$ resp. $\psi_\pi(t)$, där funktionerna ψ_0 och ψ_π är kända (detta ger de s.k. **randvillkoren**). Antag också att temperaturen i varje punkt på staven är känd vid tiden $t = 0$: $u(x,0) = \phi_0(x)$ (det s.k. **begynnelsevillkoret**). Den partiella differentialekvationen $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ kallas **värmeledningsekvationen** och beskriver värmespridningen i ett endimensionellt objekt utan värmekälla. Lösningen $u(x,t)$ till begynnelse- och randvärdesproblemet ovan ger temperaturen i punkten x vid tidpunkten t för alla $x \in (0,\pi)$, $t \in (0,\infty)$. (En eventuell värmekälla skulle medföra att differentialekvationen blir inhomogen, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$.)

Vi ska till att börja med titta på en något förenklad variant av ovanstående problem, nämligen fallet då ändarna hålls vid den konstanta temperaturen 0. Av rent fysikaliska skäl förväntar man sig att det finns en entydig lösning samt att $u(x,t) \to 0$ då $t \to \infty$ (det tillförs ingen värme, alltså borde staven svalna tills temperaturen i ändarna och i de inre punkterna jämnas ut).

Vi ska göra ett försök att "separera variablerna", d.v.s. hitta en lösning på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Anledningen till att vi gärna vill ha en lösning av den typen är att funktionerna X och T är beroende av var sin variabel och de partiella derivatorna övergår i "vanliga", d.v.s. ordinära derivator. Eftersom vi inte är det minsta säkra på att en sådan lösning existerar (vilket det heller inte gör, annat än i undantagsfall), måste vi på något sätt markera att det handlar om "önsketänkande". Det gör vi genom att säga att vi gör en **ansats**

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Det betyder att vi antar existensen av en sådan lösning och, under det antagandet, försöker bestämma funktionerna X och T. Insättning av u i differentialekvationen ger

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

Om vi nu verkligen separerar variablerna, d.v.s. låter allt som innehåller t stå på ena sidan likhetstecknet och allt som innehåller x på den andra, får vi

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \qquad t > 0, \quad x \in (0, \pi).$$

Låt oss titta närmare på likheten ovan: i vänsterledet har vi en funktion som enbart är beroende av t; i högerledet en funktion som enbart är beroende av x. Dessa två funktioner ska anta samma värden, inte bara för någon enskild punkt (x,t), utan för alla $t > 0$, $x \in (0,\pi)$. Om vi då betraktar en fix punkt $x_0 \in (0,\pi)$, så måste gälla att

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x_0)}{X(x_0)}, \quad t > 0,$$

vilket betyder att $\frac{T'(t)}{T(t)}$ måste vara konstant. Men då måste även $\frac{X''(x)}{X(x)}$ vara konstant, alltså gäller

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu, \qquad t > 0, \quad x \in (0, \pi).$$

(Minustecknet framför konstanten väljs av tekniska skäl som blir tydliga senare.) Istället för den partiella differentialekvation vi hade från början får vi nu två ordinära differentialekvationer:

$$T' + \mu T = 0, \quad t > 0; \qquad X'' + \mu X = 0, \quad x \in (0, \pi).$$

Randvillkoren för u ger oss randvillkor för X: för att $u(0,t) = X(0)T(t) = u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0$ ska gälla för alla $t > 0$ måste antingen $T(t) = 0$ för alla $t > 0$, vilket ger en ointressant nollösning, eller också måste $X(0) = X(\pi) = 0$. Vi löser till att börja med X-problemet

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0, & x \in (0, \pi), \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Beroende på μ:s tecken har differentialekvationen olika typer av lösningar.

1) $\mu < 0$: Då har vi $-\mu = \lambda^2 > 0$ och differentialekvationens allmänna lösning blir

$$X(x) = K_1 e^{-\lambda x} + K_2 e^{\lambda x}.$$

Av randvillkoren får vi: $X(0) = K_1 + K_2 = 0$, $X(\pi) = K_1 e^{-\lambda\pi} + K_2 e^{\lambda\pi} = K_1(e^{-\lambda\pi} - e^{\lambda\pi}) = 0$, vilket ger $K_1 = K_2 = 0$. Den enda lösningen av den typen är alltså den triviala (nollösningen), som är ointressant.

2) $\mu = 0$: Vi får $X(x) = K_1 x + K_2$; randvillkoren ger $X(0) = K_2 = 0$, $X(\pi) = K_1\pi + 0 = 0$, alltså blir lösningen återigen trivial.

3) $\mu > 0$: Då har vi $\mu = \lambda^2 > 0$ och differentialekvationens allmänna lösning blir

$$X(x) = K_1 \cos\lambda x + K_2 \sin\lambda x.$$

Vi sätter in $x = 0$ och $x = \pi$:

$$X(0) = K_1 \cdot 1 + K_2 \cdot 0 = 0, \quad \text{vilket ger} \quad K_1 = 0;$$

$$X(\pi) = K_2 \sin\lambda\pi = 0, \quad \text{vilket ger} \quad K_2 = 0 \quad \text{eller} \quad \lambda = n \in \mathbb{Z}.$$

Det finns alltså icke-triviala lösningar och de är

$$X_n(x) = A_n \sin nx, \quad n \in \mathbb{N},$$

(eftersom konstanterna A_n är godtyckliga ger inte $n < 0$ något nytt). Det betyder att $\mu = \lambda^2 = n^2$. Om vi då löser differentialekvationen för T får vi

$$T_n(t) = B_n e^{-n^2 t}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Vi har nu fått att om en (icke-trivial) funktion av typen $u(x,t) = X(x)T(t)$ satisfierar den partiella differentialekvationen och randvillkoren i problemet, så måste den ha utseendet

$$u_n(x,t) = C_n e^{-n^2 t} \sin nx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

I själva ordet "ansats" ingår att man gör ett antagande. För att vara säker på att man verkligen har fått en lösning måste man antingen kontrollera genom insättning, eller också noga se till att alla steg man gjort i härledningen av u_n är ekvivalenssteg och inte implikationer. Insättning ger

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -n^2 C_n e^{-n^2 t} \sin nx = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \quad u_n(0,t) = u_n(\pi,t) = 0,$$

d.v.s. vi har verkligen fått en lösning till differentialekvationen som uppfyller randvillkoren. Det är däremot helt uppenbart att begynnelsevillkoret inte kan vara uppfyllt annat än i undantagsfall, ty $u_n(x,0) = C_n \sin nx$, vilket inte behöver ha någonting med $\phi_0(x)$ att göra. Det ser ut som att vi har misslyckats med att lösa hela problemet. Räddningen heter "linearitet". Värmeledningsekvationen är en linjär partiell differentialekvation, så väl ekvation som randvillkor är homogena, vilket gör att en linjärkombination av lösningar (till differentialekvationen med de homogena randvillkoren) också är en lösning (till samma ekvation med samma randvillkor). Vi kan alltså göra ett försök att hitta en lösning på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 t} \sin nx.$$

(Det är lika uppenbart att en ändlig linjärkombination inte duger som det var tidigare att en enskild term inte gör det.) Vad vi har att spela med nu är koefficienterna C_n. För att få en lösning som satisfierar begynnelsevillkoret krävs att

$$u(x,0) = \phi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx.$$

Problemet kommer alltså att vara löst om vi lyckas utveckla ϕ_0 i sinusserie på intervallet $(0,\pi)$ och väljer C_n till koefficienterna i den utvecklingen.

Låt oss nu ta ett konkret exempel:

Exempel 13. Lös problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad \text{i} \quad \Omega, \\ u(x,0) = \cos x, \quad x \in (0,\pi), \\ u(0,t) = 0, \quad t \in (0,\infty), \\ u(\pi,t) = 0, \quad t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Lösning: Vi har tidigare utvecklat $\cos x$ i en sinusserie på intervallet $(0,\pi)$:

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1} \sin 2kx \quad \text{för} \quad x \in (0,\pi).$$

Det innebär att

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1} e^{-4k^2 t} \sin 2kx \quad \text{för} \quad x \in (0,\pi), \quad t > 0,$$

är en lösning till problemet. Vi ser att temperaturen går mot 0 då tiden växer mot oändligheten, precis som vi insåg måste vara fallet av fysikaliska skäl.

Låt oss titta på om och när serien ovan konvergerar. Vi ska göra en uppskattning av de enskilda termernas absolutbelopp. Antag till att börja med att $t \geq t_0 > 0$. Då gäller

$$\left| \frac{k}{4k^2-1} e^{-4k^2 t} \sin 2kx \right| \leq \frac{k}{4k^2-1} e^{-4k^2 t_0} = a_k.$$

Den numeriska serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, vilket medför att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1} e^{-4k^2 t} \sin 2kx$$

är absolutkonvergent för alla $t \geq t_0 > 0$ och $x \in (0,\pi)$ (t.o.m. likformigt konvergent enligt Weierstrass' kriterium). Om man tillåter t att komma nära 0 blir saken genast mycket svårare, för $t = 0$ ger den enkla uppskattningen ovan

$$\left| \frac{k}{4k^2-1} \sin 2kx \right| \leq \frac{k}{4k^2-1} = b_k,$$

där serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är divergent. Uppskattningen är alltså inte användbar. Sanningen är att serien endast är betingat konvergent då $t = 0$. Det är någorlunda lätt att se att vi kan derivera serien termvis och fortfarande få absolut- och likformigt konvergenta serier så länge som vi håller oss till $t \geq t_0 > 0$. För $t = 0$ däremot ger redan första derivatorna en divergent serie. Förklaringen är att sinusserien för $\cos x$ inte är lika med $\cos x$ i punkterna $x = 0$ och $x = \pi$; själva funktionen $\cos x$ uppfyller inte randvillkoren i $(0,0)$ och $(\pi,0)$.