

Datorlaborationer i matematiska metoder E1, del D (TMA042), vt 2002

1. Laborationerna är ej obligatoriska.
2. Laborationerna genomförs individuellt. Grupparbete godkänns ej.
3. Laborationerna består av 3 uppgifter. Förtjänstfullt utförda lösningar kan ge bonuspoäng (en per uppgift) vid tentamina i matem. met. för E1, del D, 1/6, augusti 02 och januari 03.
4. Lösningarna skall göras angiven vecka och lämnas in angiven tid.
5. Skriv namn och personnummer längst upp på varje inlämnat blad, blad utan namn eller utan personnummer rättas ej. Lösningarna lämnas tillbaka med del D-tentan.

Syfte

Att öka förståelsen för kursens olika moment genom att lära dig att utnyttja datorn för att

- se hur Frenet-systemet följer en kurva, se ytor,
- se konvergenta funktionsföljder med deras gränsfunktion, se hur bra Fourierserier approximerar funktioner (hur många övertoner behövs...),
- beräkna krökning, torsion, dubbel- och trippelintegraler, divergens och rotation mm.

Uppgift 1 (krökning, torsion, Frenet-frame)

[skall lämnas in må 22/4, kl. 15.00]

$$\text{Betrakta kurvan } C: \begin{cases} x = (a + b \cos qt) \cos pt, \\ y = (a + b \cos qt) \sin pt, \\ z = c \sin qt \end{cases} \quad 0 \xrightarrow{t} 2\pi \quad (\text{torusknot}),$$

då a, b, c, p, q ges av ditt personnummer enligt anvisningarna.

- a) Beräkna kurvans krökning och torsion i punkten $C(\frac{\pi}{3})$.
- b) Rita C och det rörliga koordinatsystemet (d.v.s. Frenet-ramen e, n, b) i en animerad framställning i punkterna $C(t)$, $t = \frac{\pi k}{10}$, $k = 1, 2, \dots, 9$.

Uppgift 2 (ytor på parameterform, area, divergens, rotation)

[skall lämnas in må 22/4, kl. 15.00, ihophäftad med uppgift 1]

- a) Då kurvorna $C_1(t) = (2 + \sinh t, \cosh 2 - \cosh t)$, $0 \xrightarrow{t} 2$
och $C_2(t) = (2 + \sin(\frac{2}{3}t), \frac{1}{2}(\cosh 2 - 1)(2 - t))$, $0 \xrightarrow{t} 2$
roterar kring x -axeln uppstår en rotationsyta. Rita denna och beräkna dess area.
Rita även den yta som uppstår då kurvorna roterar kring y -axeln.
- b) Låt $IF = (x^2 \sinh(yz), y^3 + \arctan(xz), \cosh(x + y + z) \sin(xyz))$.
Beräkna med datorn $rot(IF)$, $div(IF)$, $div(rot(IF))$ och $rot(grad(div(IF)))$.

Uppgift 3 (funktionsföljder, Fourierserier)

[skall lämnas in ti 20/5, kl. 17.00]

a) Låt $f_n(t; A) = e^{-\left|\frac{t}{A}\right|^n}$, $A > 0$ ("super-Gaussian-windows").

Rita funktionerna $f_n(t; 1)$ för $n = 1, 2, \dots, 10$, $-3 \leq t \leq 3$.

Visa sedan för hand att följderna $f_n(t; A)$ är punktvis konvergent på \mathbb{R} och beräkna gränsvfunktionen. Är $f_n(t; A)$ likformigt konvergent på \mathbb{R} ?

Vilken roll spelar A ?

b) f är udda, har period 4 och $f(t) = (1-t)\theta(1-t)$ för $t \in (0, 2)$.

b1) Rita för $t \in (-2, 2)$ f och dem N :te delsummorna $S_N(t)$ till

Fourierserien till f för $N = 4, 13, 53$ i ett diagram.

b2) Rita för $t \in (-2, 2)$ f och "Cesaro-medelvärde" $\frac{1}{53} \sum_{k=1}^{53} S_k(t)$ i ett diagram.

ANVISNINGAR

Uppg.1: Ta som a, b, c, p, q de fem första siffrorna i ditt personnummer utom 0 (hoppa över nollor). T.ex. ger 89-12-17-0337 värdena 8,9,1,2,1, persnr. 89-01-10-3506 ger värdena 8,9,1,1,3; har du få många nollor i ditt persnr., så börjar du om från början: 80-01-02-0003 ger värdena 8,1,2,3,8, se labb C). Repetera noggrant avsnitt 5.7 i Persson/Böjers!

Normalen \mathbf{n} få så (normeringen görs sedan med \mathbf{e}_h):

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = \frac{d\mathbf{e}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{v} \right) \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\ddot{\mathbf{r}}v - \dot{\mathbf{r}}\dot{v}}{v^2} \quad \text{där } v = |\dot{\mathbf{r}}| = \frac{ds}{dt}. \text{ Se EX 2, där hittar du}$$

kommentarer och tips. Lämna in figuren med kurvan och \mathbf{e} , \mathbf{n} , \mathbf{b} i en lämplig punkt.

Om du tycker att det tar för lång tid (för ditt persnr.) rita kurvan bara med *spacecurve*.

På kursens hemsida finns ytterligare en fin-fin animering av Frenet-ramen, nämligen för den koniska skruvlinjen.

Uppg.2: a) Se EX 1 och EX 3. Rotationsytan kring y -axeln ges av $(x \cos \varphi, y, x \sin \varphi)$.

b) Se EX 4: Med linjär-algebra-paketet kan du i *maple* beräkna gradientvektorn ∇f med `>grad(f(x,y,z),[x,y,z])` och för $\mathbf{IF} = (X, Y, Z)$ rotationen ("curl") $\text{rot } \mathbf{IF} = \nabla \times \mathbf{IF}$ med `>curl([X,Y,Z],[x,y,z])` och divergensen $\text{div } \mathbf{IF} = \nabla \cdot \mathbf{IF}$ med `diverge([X,Y,Z],[x,y,z])`.

Uppg.3:a) Gör en animerad framställning, glöm ej "för hand uppgiften", svara! Skriv gärna dina kommentarer/svar för hand...Se EX5.

b) Du skall göra tvådiagram, rita det första animerad. Se EX5. Beräkna a_n och b_n med *maple* (men gör det även för hand, det är en typisk tentauppgift). Kommentera Cesaro-medelvärde!

Lycka till!

mars 2002,
Bernhard

