Övningar till matematiska metoder E1, del D, vt 2000

V. KRÖKNING OCH TORSION FÖR KURVOR

1. Bestäm krökning och krökningsradie för kurvan $C: t \mapsto \left(t^6, t^4, t^2\right)$ i punkten $(1,1,1)$.

2. Beräkna krökning och torsion av kurvan $\mathbf{r}(t) = \left(t, 1-t, e^t \sin(1-t)\right)$ i punkten $(1,0,0)$.

3. Bestäm krökning och krökningsradie för kurvan $C: t \mapsto \left(\cos(2t), 2t - \sin(2t), 4\sin(t)\right)$ i punkten $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

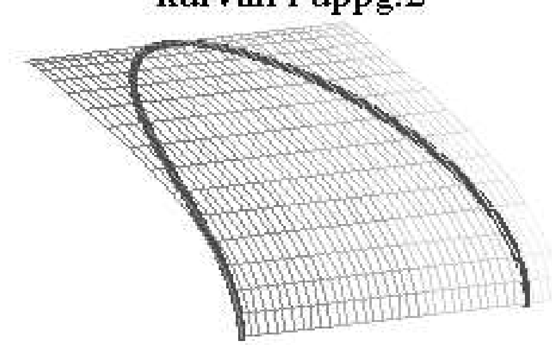
4. Härled formeln $\kappa(t) = \pm \dfrac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\sqrt{\left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\right)^3}}$ för krökningen av en C^2-kurva $C: t \mapsto \left(x(t), y(t)\right)$ i planet och kom på (och visa) ett samband mellan "konvex/konkav" och "positiv/negativ krökning".
[ledn: betrakta kurvan $t \mapsto \left(x(t), y(t), 0\right)$ i $\mathbb{R}^3$! Eller sid. 8:10 i JP2 förstås]

5. Bestäm krökning och krökningsradie för kurvan $y = \tan x$ i punkten $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

6. Bestäm maxinala krökningen för kurvan $y = \sinh x$.

7. Bestäm krökning och krökningsradie för ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ 0 < b \le a$.
I vilka punkter är krökningen maximal/minimal? Diskutera även fallet $a = b$.

<u>svar:</u>



1. $\kappa = \dfrac{\sqrt{19}}{7\sqrt{14}},\quad R = \dfrac{1}{\kappa}$

2. $\kappa(1) = \dfrac{2\sqrt{2}\,e}{\left(2+e^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \tau(1) = 0$

3. $\kappa = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

5. $\kappa = \dfrac{4}{5\sqrt{5}}$

6. $\kappa = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ för $x = \pm \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

7. min i $(0, \pm b)$, max i $(\pm a, 0)$; om $a = b$, så är krökningsradien = cirkelns radie
$\kappa(t) = \dfrac{ab}{\left(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$