

**TMA 042****Matematik CTH****Tentamensskrivning i Matematiska metoder E1, del D**

Datum: 2001-08-27, kl. 8.45 - 12.45.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Robert Bohlin, tel. 0740-459022.

OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

=====

1. Kroppen  $K$ , som bestäms av olikheterna  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ;  $3z^2 \geq x^2 + y^2$ ;  $z \geq 0$ , har konstant densitet  $\rho = 1$ . Beräkna tröghetsmomentet med avseende på  $z$ -axeln. (5p)

2. Givet är parabeln  $y = ax^2$ ,  $a > 0$ . Bestäm dess maximala krökning. (4p) Visa att den ej har någon minimal krökning. Gäller det sista påståendet för en godtycklig parabel? Motivera! (2p)

3. Beräkna integralen  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , där  $\mathbf{F} = (xz, xy, 3xz)$  och  $C$  är randen till triangelytan med hörnen  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 0, 2)$ , som genomlöps ett varv moturs, sedd från punkten  $(10, 10, 10)$ . (6p)

4.(a) Låt  $0 < a < \pi$ . Betrakta funktionen  $f(x) = (2a)^{-1}$ ,  $|x| \in [-a, a]$ ,  $f(x) = 0$ ,  $a < |x| < \pi$ . Ge en formel för  $f(x)$  på hela intervallet  $(-\pi, \pi)$  i termer av Heavisides funktion  $\theta(x)$ . (1p)

(b) Låt  $F$  vara den  $2\pi$ -periodiska fortsättningen av  $f$ , d.v.s.  $F$  är  $2\pi$ -periodisk och  $F(x) = f(x)$  på intervallet  $(-\pi, \pi)$ . Utveckla  $F$  i reell Fourierserie. (4p)

(c) I vilka punkter kommer Fourierseriens summa att sammanfalla med  $F$  och varför? (1p)

(d) Stämmer Fourierutvecklingen även för  $a = \pi$ ? (2p)

(e) Beräkna  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ . (2p)

(f) Är Fourierserien likformigt konvergent på  $(-\pi, \pi)$ ? Motivera! (2p)

5. Bestäm om serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$$

är (a) konvergent; (b) likformigt konvergent på intervallet  $[0, 1]$ . (6p)

6. Formulera Gauss' divergenssats. (2p) Visa satsen för ett vektorfält på formen  $u = (u_1, 0, 0)$ . (5p)

7. Ge två olika formuleringar av jämförelsekriteriet för positiva serier. (3p) Visa en av varianterna (välj själv vilken). (4p) Ge ett exempel som visar hur kriteriet används. (1p)