TMA 042
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Matematiska metoder E1, del D
Datum: 2002-01-16, kl. 14.15 - 18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Niklas Andreasson, tel. 0740-459022.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Beräkna flödet av fältet (x^3, y^3, z^2) ut genom randen till kroppen som begränsas av $x^2 + y^2 = 9,\ z = 0,\ z = 2.$ (6p)

2. Beräkna integralen $\iint_Y y^2 z^2 dS$, där Y är den del av den koniska ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ som ligger mellan planen $z = 1$ och $z = 2.$ (6p)

3. Kurvan C består av kvartscirkeln $y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$ för $x \in [-r, 0]$ och av parabeln $y = ax^2$ för $x > 0$ $(a > 0)$. Bestäm parametern a så att C:s krökning i origo blir kontinuerlig. (6p)

4.(a) Funktionen $\operatorname{sgn}(x)$ ("signum x") definieras på följande sätt: $\operatorname{sgn}(x) = -1$ för $x < 0$, $\operatorname{sgn}(x) = 1$ för $x > 0$. Uttryck $\operatorname{sgn}(x)$ i termer av Heavisides funktion $\theta(x)$. (1p)

(b) Låt f vara den 2π-periodiska funktion som sammanfaller med $\operatorname{sgn}(x)$ på intervallet $(-\pi, \pi)$. Utveckla f i Fourierserie (antingen reell eller komplex, förklara varför du väljer som du gör). (4p)

(c) I vilka punkter kommer Fourierseriens summa att sammanfalla med f och varför? (1p)

(d) Är Fourierserien likformigt konvergent? Motivera! (2p)

(e) Vad ger Parsevals formel? (2p)

(f) Konstruera en följd av kontinuerliga funktioner som (punktvis) konvergerar mot $\operatorname{sgn}(x)$ (det kan vara en bra idé att börja grafiskt). (2p)

5. Avgör om funktionsföljden

$$f_n(x) = \frac{2}{\pi} \arctan nx, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R},$$

är **(a)** konvergent; **(b)** likformigt konvergent på $\mathbb{R}$ när $n \to \infty$. Motivera! (6p)

6. Vilka av följande påståenden är sanna? Ge bevis/motexempel. Skriv upp de tre vänsterleden i formell nablasymbolik.
(a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} u) = 0\ \forall u$; **(b)** $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = 0\ \forall f$; **(c)** $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}\ \forall f$. (6p)

7. Formulera och bevisa integralkriteriet för serier. (6p) Använd det för att undersöka konvergensen/divergensen av serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ beroende på parametern α. (2p)